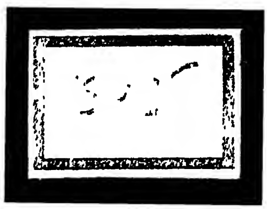

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XL, 1

# VORLESUNGEN ÜBER ZAHLEN- UND FUNKTIONENLEHRE

VON

ALFRED PRINGSHEIM
PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ERSTER BAND

## ZAHLENLEHRE

LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1916

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XL, 1. 2

# VORLESUNGEN ÜBER ZAHLENLEHRE

## (REELLE UND KOMPLEXE ZAHLEN UNENDLICHE ALGORITHMEN)

VON

ALFRED PRINGSHEIM
PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ZWEITE ABTEILUNG

## UNENDLICHE REIHEN MIT REELLEN GLIEDERN

LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1916

Published by J. W. Edwards
Ann Arbor, Michigan
1948

Lithoprinted by Edwards Brothers, Inc.
Ann Arbor, Michigan, U.S.A.

# Vorwort.

Die vorliegende *zweite Abteilung* meiner Vorlesungen über *Zahlenlehre* ist ausschließlich der Theorie der *unendlichen Reihen mit reellen Gliedern* gewidmet. Vom streng systematischen Standpunkte aus wäre es wohl konsequenter gewesen, die mit der Entwicklung der Lehre von den *reellen Zahlen* begonnene sukzessive Ausgestaltung des Zahlvorrats unserer gewöhnlichen Arithmetik durch Einführung der *imaginären* bzw. *komplexen Zahlen* erst vollständig zu Ende zu führen. Rücksichten wesentlich didaktischer Natur veranlaßten mich indessen zu der hier getroffenen Anordnung, insbesondere der Wunsch, den Leser durch eine gewisse Einförmigkeit des Lehrstoffes nicht allzusehr zu ermüden und ihm statt dessen schon jetzt in der Lehre von den unendlichen Reihen ein an bemerkenswerten Fragestellungen und prinzipiell wichtigen Ergebnissen außerordentlich reiches Anwendungsgebiet der bisherigen Grenzwertbetrachtungen zu eröffnen. Dem gegenüber erschien es mir ziemlich unerheblich, daß die Lehre von den unendlichen Reihen auf diese Weise in zwei durch Einschiebung der grundlegenden Erörterungen über komplexe Zahlen getrennte Stücke zerfällt, zumal schon bei der Beschränkung auf *reelle* Zahlen *alles wesentliche* der Theorie vollständig zur Erledigung kommt (anders wie bei den unendlichen Produkten und Kettenbrüchen) und die Ausdehnung der gewonnenen Resultate auf Reihen mit *komplexen* Gliedern, als bloßen Aggregaten je zweier *reeller* Reihen, sich nahezu automatisch vollzieht.

Die Darstellung der Reihenlehre beginnt naturgemäß mit allgemeinen Betrachtungen über *Konvergenz* und *Divergenz*, wobei insbesondere die verschiedenen Möglichkeiten, die *notwendigen und hinreichenden Konvergenzbedingungen* zu formulieren, einer ausführlichen Kritik unterzogen und gewisse auf dem Cauchyschen Grenzwertsatze und seinen Verallgemeinerungen beruhende weniger bekannte Formen dieser Bedingungen hergeleitet werden. Bei der sodann folgenden Behandlung der Reihen mit lauter *positiven* (bzw. *nicht-negativen*) *Gliedern* wird nach Feststellung ihrer besonderen Konvergenzeigenschaften eine ganz einheitlich auf das bekannte *Prinzip der Reihenvergleichung* gegründete ausführliche Theorie der *Konvergenz- und Divergenzkriterien* entwickelt, welche den Zweck verfolgt, nicht etwa nur die verhältnismäßig geringe Anzahl der für praktische Anwendung fast ausschließlich in Betracht kommenden Spezialkriterien abzuleiten, vielmehr vor allem den inneren Zusammenhang dieser sonst zumeist mit Hilfe einzelner Kunstgriffe gewonnenen Regeln durch Zurückführung auf allgemeine Methoden kenntlich zu machen, den scheinbaren *Widerspruch* zwischen der üblichen Form gewisser Kriterien, nämlich der sogenannten *Konvergenzkriterien zweiter Art* einschließlich des *Kummerschen Konvergenzkriteriums*, und dem *Prinzip der Reihenvergleichung* aufzuklären und jenes letztere Kriterium, das als Kriterium

*zweiter* Art von geradezu überraschender Allgemeinheit bei der sonstigen Darstellungsweise völlig abseits stand und keinerlei Analogon unter den Kriterien *erster* Art zu besitzen schien, aus dieser rätselhaften Isolierung befreit als natürliches Glied einer folgerichtig aufgebauten allgemeinen Theorie erscheinen zu lassen. Es folgen Untersuchungen über die *Tragweite* der verschiedenen *Kriterien* bzw. Kriterien*arten*, über die prinzipielle *Begrenztheit der Leistungsfähigkeit* aller möglichen Kriterienbildungen, über sogenannte *Grenzgebiete* und *Schranken* der *Konvergenz* und *Divergenz* — Untersuchungen, die in Verbindung mit den zuvor bezeichneten teilweise geeignet sind, gegebenenfalls an die Stelle von Zufallserfolgen einiger Spezialkriterien ein zielbewußtes Operieren mit einem wohlgeordneten Kriterienvorrat treten zu lassen, vor allem aber dem Leser eine möglichst tiefe, *an sich* wertvolle und zugleich das Studium der *Funktionenlehre* in fruchtbarer Weise vorbereitende Einsicht in das Wesen der Reihenkonvergenz vermitteln sollen.

Die Betrachtung der Reihen mit *positiven und negativen Gliedern* führt zu den Begriffen der *absoluten* und *nicht-absoluten*, der *unbedingten* und *bedingten* Konvergenz und zu dem Nachweise des vollständigen Zusammenfallens von *absoluter* und *unbedingter* bzw. *nicht-absoluter* und *bedingter* Konvergenz. Daran schließt sich die Angabe derjenigen Hilfsmittel, welche zur Feststellung der *„effektiven“* d. h. eventuell nur *bedingten* Konvergenz zur Verfügung stehen, sowie eine methodische Untersuchung der Beziehungen, welche bei gewissen allgemeinen Typen *bedingt* konvergenter Reihen zwischen bestimmten *Umordnungsgesetzen* und den dadurch erzeugten *Wertveränderungen* bestehen. Den Schluß dieses Kapitels bildet die Entwicklung zweier Methoden, die dazu dienen, *schlecht* (d. h. sehr langsam) *konvergierende* Reihen zum Zwecke der *numerischen Berechnung* in wesentlich *besser konvergierende* umzuwandeln.

Parallel mit dem letzten, die *Doppelfolgen* behandelnden Kapitel der vorigen Abteilung erscheint als Abschluß der vorliegenden eine eingehende Behandlung der Lehre von den *Doppelreihen* mit reellen Gliedern. Dabei wird, wie dort zwischen *Doppellimites* und *iterierten Limites*, hier scharf unterschieden zwischen *Doppelreihen* und *iterierten Reihen*, und es werden die Beziehungen zwischen beiden Kategorien festgestellt, insbesondere diejenigen einer *Doppel*reihe zu den aus den *Zeilen* und *Kolonnen* gebildeten *iterierten* Reihen, schließlich auch zu der aus den *Diagonalen* gebildeten *einfachen* Reihe. Weiter erfolgt auch hier der Nachweis für das vollständige Zusammenfallen von *absoluter* und *unbedingter* bzw. *nicht-absoluter* und *bedingter* Konvergenz. Mit einer Anwendung der Lehre von den Doppelreihen auf die *Multiplikation einfach unendlicher Reihen* und mit der Ableitung von *Konvergenz- und Divergenzkriterien* für Doppelreihen mit nicht-negativen Gliedern schließt dieses Kapitel und damit auch diese Abteilung.

München, im August 1916.

## Inhaltsverzeichnis.

### Abschnitt II.

### Unendliche Reihen mit reellen Gliedern.

#### Kapitel I.

#### Allgemeine Grundlagen.

Seite

§ 44. Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen. — Summe und Rest einer unendlichen Reihe. — Allgemeine Sätze über konvergente Reihen . . 293

§ 45. Anwendungen des Cauchyschen Grenzwertsatzes (§ 37) und seiner Verallgemeinerung auf unendliche Reihen . . . . . . . . . . . . . . . . 305


#### Kapitel II.

#### Reihen mit lauter positiven Gliedern.

§ 46. Allgemeine Eigenschaften. — Unbedingte Konvergenz. — Summen unendlich vieler Reihen mit positiven Gliedern . . . . . . . . . . . . 310

§ 47. Prinzip der Reihenvergleichung. — Allgemeine Form von Konvergenz- und Divergenzkriterien . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 317

§ 48. Divergente Reihen: $\Sigma d_\nu$. — Typische Formen der $d_\nu$ . . . . . . . . 324

§ 49. Konvergente Reihen: $\Sigma c_\nu$. — Typische Formen der $c_\nu$ . . . . . . . 330

§ 50. Die Kriterien erster Art . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 335

§ 51. Beispiele für die Anwendung der Kriterien erster Art. — Divergenzmaß der Reihen: $\sum \frac{1}{L_k(\nu)}$, $\sum \frac{1}{\nu^{1-\varrho}}$. — Legendres Näherungsformel für die Häufigkeit der Primzahlen . . . . . . . . . . . . . 344

§ 52. Über die Tragweite der Kriterien erster Art. — Unmöglichkeit eines absolut wirksamen Kriteriums. — Reihen, welche wegen besonders schwacher Divergenz oder Konvergenz auf keins der logarithmischen Kriterien reagieren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 353

§ 53. Grenzgebiete und Schranken der Divergenz und Konvergenz für Reihen mit monoton abnehmenden Gliedern . . . . . . . . . . . . . . . . . 363

§ 54. Die Kriterien zweiter Art . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 377

§ 55. Anwendung der Kriterien zweiter Art zur Ableitung der Gaußschen Kriterien und deren Verallgemeinerung . . . . . . . . . . . . . . . 386

§ 56. Über die Tragweite der Kriterien zweiter Art und ihre Beziehungen zu den Kriterien erster Art . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 390

Seite

## Kapitel III.

### Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

§ 57. Absolute und nicht-absolute Konvergenz. — Riemanns Satz über die Herstellung einer nicht-absolut konvergenten Reihe mit vorgeschriebener Summe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 401
§ 58. Bedingte und unbedingte Konvergenz. — Zusammenfallen von absoluter und unbedingter Konvergenz. — Summen unendlich vieler absolut konvergenter Reihen. — Multiplikation absolut konvergenter Reihen . . . 406
§ 59. Kriterien für *effektive*, d. h. eventuell nur bedingte Konvergenz. — Alternierende Reihen. — Abelsche Transformation und darauf beruhende Konvergenzkriterien — Dirichletsche Reihen. — Ein Grenzwertsatz. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 413
§ 60. Genauere Untersuchung der Wertveränderungen bedingt konvergenter Reihen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 424
§ 61. Über numerische Berechnung und Transformation unendlicher Reihen: Die Methoden von Euler und Kummer. . . . . . . . . . . . . . 437

## Kapitel IV.

### Unendliche Doppelreihen mit reellen Gliedern.

§ 62. Doppelreihen und iterierte Reihen. — Konvergenz und Divergenz einer Doppelreihe. — Beziehungen zwischen einer Doppelreihe und der aus den Zeilen- bzw. Kolonnenreihen gebildeten iterierten Reihe . . . . . 449
§ 63. Beziehungen zwischen einer Doppelreihe und der aus den Diagonalsummen gebildeten einfachen Reihe . . . . . . . . . . . . . . . . 459
§ 64. Absolut konvergente Doppelreihen. — Zusammenfallen von absoluter und unbedingter Konvergenz. — Bedingt konvergente Doppelreihen. . . . 469
§ 65. Über eine besondere Anordnung konvergenter Doppelreihen mit konvergenten Zeilen und Kolonnen . . . . . . . . . . . . . . . . . 480
§ 66. Anwendung der Lehre von den Doppelreihen auf die Multiplikation einfach-unendlicher Reihen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 483
§ 67. Konvergenz- und Divergenzkriterien für Doppelreihen mit nicht-negativen Gliedern . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 502

Abschnitt II.

# Unendliche Reihen mit reellen Gliedern.

## Kapitel I.

## Allgemeine Grundlagen.

### § 44. Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen. — Summe und Rest einer unendlichen Reihe. — Allgemeine Sätze über konvergente Reihen.

1. Unter einer *unbegrenzten Summenfolge* oder, wie man gewöhnlich kürzer, wenn auch weniger prägnant, zu sagen pflegt, einer *unendlichen Reihe* verstehen wir zunächst *rein formal* eine unbegrenzte Zahlenfolge $(u_\nu)$, deren Glieder durch das Summationszeichen verbunden sind, also:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_\nu + \cdots,$$

kürzer geschrieben:

$$\sum_0^\infty {}_\nu\, u_\nu$$

oder auch, wenn ein Mißverständnis ausgeschlossen erscheint:

$$\sum u_\nu .$$

Bezüglich der *Bedeutung* eines solchen als *unendliche Reihe* bezeichneten Symbols setzen wir nun folgendes fest. Es bedeute $s_n$ die Summe aller Glieder bis $u_n$ einschließlich, also:

$$(1) \qquad s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_0^n {}_\nu\, u_\nu .$$

Die Zahlen $s_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ bilden dann, geradeso wie die $u_\nu$, eine unbegrenzte Zahlenfolge. Ist diese *konvergent* und etwa:

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

wo also $s$ eine bestimmte Zahl (einschließlich der Null) vorstellt, so heißt die Reihe $\sum u_\nu$ *konvergent* und $s$ ihre *Summe*, in Zeichen:

$$(3) \qquad \sum_0^\infty {}_\nu u_\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n {}_\nu u_\nu = s.$$

In jedem anderen Falle heißt die Reihe *divergent* und zwar:

*eigentlich divergent*, wenn die Folge $(s_\nu)$ *eigentlich divergiert*, also $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$;

*uneigentlich divergent*, auch *unbestimmt* oder *oszillierend*, wenn die Folge $(s_\nu)$ *uneigentlich divergiert*, d. h. wenn $\varliminf\limits_{n\to\infty} s_n$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} s_n$ *verschieden* ausfallen; insbesondere *endlich unbestimmt* oder *innerhalb endlicher Grenzen oszillierend*, wenn *keiner* der Hauptlimites $\varliminf\limits_{n\to\infty} s_n$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} s_n$ *unendlich* ausfällt (anders ausgesprochen: wenn $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |s_n|$ *endlich ist*).

Obschon im Falle der *Divergenz* eine *Summe* der Reihe in dem zuvor definierten Sinne *nicht existiert*, so bedient man sich der Bequemlichkeit halber, um *alle* Möglichkeiten mit einem *gemeinsamen* Ausdrucke zu umfassen, nicht selten der Redewendung: die *Summe* der unendlichen Reihe sei im Falle der *eigentlichen* Divergenz (positiv oder negativ) *unendlich groß*, in Zeichen:

$$(4) \qquad \sum_0^\infty {}_\nu u_\nu = +\infty \quad \text{oder} \quad \sum_0^\infty {}_\nu u_\nu = -\infty,$$

bzw. die *Summe* der Reihe sei im Falle der *uneigentlichen* Divergenz *unbestimmt* und zwar, wenn $l$, $L$ den *unteren* bzw. *oberen Limes* von $s_n$ bedeutet, *sie oszilliere* in den Grenzen $l$ und $L$, wobei eventuell auch $l = -\infty$, $L = +\infty$ sein kann.

2. Aus der obigen *Definition* der *Konvergenz* einer unendlichen Reihe ergibt sich sofort als *notwendige und hinreichende* Bedingung für die Konvergenz: Jedem (beliebig klein vorgeschriebenen) $\varepsilon > 0$ muß sich eine natürliche Zahl $n$ zuordnen lassen, sodaß:

$$(5) \qquad |s_{n+\varrho} - s_n| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \varrho = 1, 2, 3, \cdots.$$

Setzt man:

$$(6) \qquad R_{n,n+\varrho} = s_{n+\varrho} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+\varrho}$$

und bezeichnet $R_{n,n+\varrho}$ als einen *Partialrest* der Reihe, so kann die Konvergenzbedingung auch folgendermaßen ausgesprochen werden: Es muß

jeder *Partialrest* $R_{n,n+\varrho}$ bei völlig willkürlichem $\varrho$ *lediglich durch geeignete Wahl* von $n$ numerisch *beliebig klein* werden. Dabei folgt aus:

(6a) $$|R_{n,n+\varrho}| = |s_{n+\varrho} - s_n| < \varepsilon$$

stets auch:

(6b) $$|R_{\nu,\nu+\varrho}| = |s_{\nu+\varrho} - s_\nu| < 2\varepsilon \quad \text{für:} \begin{cases} \nu \geqq n \\ \varrho = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

(vgl. § 22, Nr. 1, S. 125), d. h. es wird mit $R_{n,n+\varrho}$ auch jeder *spätere* Partialrest *beliebig klein*, sodaß auch die Bedingung (6b) als *notwendig* und (selbstverständlich als) *hinreichend* für die Konvergenz der Reihe angesehen werden kann.

Im übrigen kann man dieser notwendigen und hinreichenden Bedingung auch noch andere Formen geben. Und obschon dieselben vor den hier gegebenen Formen (6)—(6b) keinerlei Vorzüge besitzen und eher geeignet sind, den wahren Sachverhalt zu verdunkeln, als ihn aufzuhellen, so soll doch etwas näher darauf eingegangen werden, da man in den Schriften ganz bedeutender Mathematiker und in weit verbreiteten Lehrbüchern mancherlei unklares oder geradezu falsches über diese doch schließlich grundlegende Frage findet.

3. Bezeichnet man mit $R_n$ diejenige *unendliche Reihe*, welche aus der gegebenen durch Weglassung aller Glieder bis $u_n$ einschließlich entsteht, also:

(7) $$R_n = \sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu\, u_\nu$$

(zunächst wiederum *rein formal*, d. h. gleichgültig, ob die rechts stehende „Summe“ eine bestimmte Zahl vorstellt oder nicht), so soll $R_n$ schlechthin der *Rest* der Reihe heißen. Ist dann die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu$ *konvergent* und $s$ ihre *Summe*, so hat man:

(8) $$\begin{aligned} R_n &= \lim_{\varrho\to\infty} R_{n,n+\varrho} = \lim_{\varrho\to\infty} (s_{n+\varrho} - s_n) \\ &= s - s_n, \end{aligned}$$

und daher (wegen: $\lim\limits_{n\to\infty}(s - s_n) = 0$):

(9) $$\lim_{n\to\infty} R_n = 0, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{\varrho\to\infty} \sum_{n+1}^{n+\varrho}{}_\nu\, u_\nu\right) = 0.$$

Diese Beziehung bildet also in *dem* Sinne eine *notwendige* Bedingung für die *Konvergenz* der Reihe, daß sie zweifellos erfüllt ist, wenn die

Reihe *konvergiert*. Und da sie andererseits auch *nur* dann besteht, wenn die Reihe *konvergiert*, so ist sie in diesem Sinne auch eine *hinreichende*. Nichtsdestoweniger muß es als durchaus verfehlt bezeichnet werden, wenn man diese Tatsachen, wie nicht selten geschieht, als Kriterium für die Konvergenz in den folgenden Satz zusammenfaßt: „Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe besteht darin, daß *der Rest* $R_n$ mit unendlich wachsendem $n$ gegen Null konvergiert.“ Bei dieser Fassung wird nämlich in Wahrheit schon die *Existenz* einer bestimmten als *Rest* bezeichneten *Zahl* $R_n$ und damit geradezu die *Konvergenz* der Reihe von vornherein *vorausgesetzt* (denn, falls $R_n$ für *irgendein* $n$ eine bestimmte Zahl vorstellt, so gilt das gleiche für *jedes* $n$, da ja die Weglassung oder Hinzufügung einer *endlichen* Anzahl von Gliedern jene Eigenschaft nicht aufhebt).

Will man der lediglich für eine bereits als *konvergent* erkannte Reihe bestehenden Beziehung (9) eine wirklich korrekte Form der notwendigen und hinreichenden Konvergenzbedingung nachbilden, so hat man zu beachten, daß es sich in (9) um die Beschaffenheit eines gewissen *iterierten* Limes handelt und daß andererseits die *Existenz* eines solchen keineswegs diejenige des *inneren* Limes erfordert. Man wird also die Beziehung (9) durch die folgende ersetzen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{\underline{\lim}}_{\varrho\to\infty}\sum_{n+1}^{n+\varrho}{}_{\nu}\, u_\nu\right)=0, \tag{10a}$$

von der sich in der Tat nachweisen läßt, daß sie eine *hinreichende* Bedingung für die Konvergenz der Reihe bildet.[1]) Zunächst ist nämlich ersichtlich, daß diese Bedingung genau dieselbe Tragweite besitzt, wie die folgende[2]):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{\lim}_{\varrho\to\infty}\left|\sum_{n+1}^{n+\varrho}{}_{\nu}\, u_\nu\right|\right)=0. \tag{10b}$$

---

1) Die *Notwendigkeit* der Bedingung (10a) bedarf keines Beweises, da ja schon die *stärkere* (nämlich ausdrücklich noch das Zusammenfallen von

$$\underline{\lim}_{\varrho\to\infty}\sum_{n+1}^{n+\varrho}{}_{\nu}\, u_\nu \quad\text{und}\quad \overline{\lim}_{\varrho\to\infty}\sum_{n+1}^{n+\varrho}{}_{\nu}\, u_\nu$$

verlangende) Bedingung (9) als *notwendig* erkannt wurde.

2) Man beachte, daß $\overline{\lim}_{\varrho\to\infty}|a_\varrho|$ keineswegs mit $|\overline{\lim}_{\varrho\to\infty} a_\varrho|$ identisch ist, sondern den *größeren* der Absolutwerte von $\overline{\lim}_{\varrho\to\infty} a_\varrho$ und $\underline{\lim}_{\varrho\to\infty} a_\varrho$ darstellt (bzw. *beide*, wenn $|\underline{\lim}_{\varrho\to\infty} a_\varrho| = |\overline{\lim}_{\varrho\to\infty} a_\varrho|$).

Ist nun diese Bedingung erfüllt, so muß zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ ein $m$ sich so fixieren lassen, daß:

$$\overline{\lim_{\varrho \to \infty}} \left| \sum_{m+1}^{m+\varrho} {}_{\nu}\, u_\nu \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus dieser letzten Beziehung folgt dann weiter: jedem solchen $m$ läßt sich ein $\varrho_m$ (welches im allgemeinen mit $m$ veränderlich sein wird) so zuordnen, daß:

$$\left| \sum_{m+1}^{m+\varrho} {}_{\nu}\, u_\nu \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \quad \varrho \geqq \varrho_m.$$

Man hat also für $\varrho = \varrho_m$ und $\varrho = \varrho_m + \sigma$:

$$\left| \sum_{m+1}^{m+\varrho_m} {}_{\nu}\, u_\nu \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \sum_{m+1}^{m+\varrho_m+\sigma} {}_{\nu}\, u_\nu \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\sigma = 1, 2, 3, \cdots),$$

und hieraus für den absoluten Betrag der Differenz dieser Summen:

$$\left| \sum_{m+\varrho_m+1}^{m+\varrho_m+\sigma} {}_{\nu}\, u_\nu \right| < \varepsilon \quad (\sigma = 1, 2, 3, \cdots),$$

oder, wenn man $m + \varrho_m = n$ setzt:

$$\left| \sum_{n+1}^{n+\sigma} {}_{\nu}\, u_\nu \right| = | s_{n+\sigma} - s_n | < \varepsilon \quad (\sigma = 1, 2, 3, \cdots),$$

sodaß in der Tat die *Konvergenzbedingung* (5) erfüllt ist.[1])

Man kann schließlich der soeben als notwendig und hinreichend erkannten Konvergenzbedingung (10a) noch eine etwas andere Form geben, welche darauf beruht, daß im Falle der *Konvergenz* der Reihe $\sum u_\nu$ nicht nur der *iterierte* Limes (9) bzw. (10a), sondern auch der entsprechende *Doppel*limes verschwindet (woraus dann umgekehrt nach dem Satze (Ia) des § 43, Nr. 1, S. 284, wieder ohne weiteres das Verschwinden des *iterierten*

1) Man könnte dieses Resultat auch so aussprechen, daß allemal, wenn Gl. (10a) besteht,

$$\underline{\lim_{\varrho \to \infty}} \sum_{n+1}^{n+\varrho} {}_{\nu}\, u_\nu = \overline{\lim_{\varrho \to \infty}} \sum_{n+1}^{n+\varrho} {}_{\nu}\, u_\nu$$

wird und eine bestimmte Zahl vorstellt.

Limes (10a) folgen würde). Es soll also gezeigt werden, daß die Beziehung:

$$(11)\quad \lim_{n,\varrho\to\infty} \sum_{n+1}^{n+\varrho} u_\nu = 0,\ \text{anders geschrieben (s. Gl. (6)):}\ \lim_{n,\varrho\to\infty} R_{n,n+\varrho} = 0,$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum u_\nu$ darstellt. Ist nämlich diese Bedingung erfüllt, so lassen sich auf Grund der Definition eines Doppellimes (§ 40, S. 254, Ungl. (2a)) zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ zwei Zahlen $m, r$ so fixieren, daß:

$$|R_{\nu,\nu+\varrho}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:}\ \nu \geqq m,\ \varrho \geqq r,$$

d. h.:

$$(11\text{a})\qquad |u_{\nu+1} + u_{\nu+2} + \cdots + u_{\nu+\varrho}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:}\ \nu \geqq m,\ \varrho \geqq r.$$

Daß diese letztere Bedingung eine für die *Konvergenz* der Reihe *notwendige* ist, geht unmittelbar aus der Vergleichung mit der bereits als notwendig erkannten Bedingung (6b) hervor, da sie ja bezüglich der Auswahl von $\varrho$ geringere Ansprüche macht als diese letztere. Nichtsdestoweniger erweist sie sich auch als *hinreichend*. Aus (11a) folgt nämlich speziell für $\varrho = r$ und $\varrho = r + \sigma$:

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+r}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+r+\sigma}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\sigma = 1, 2, 3, \cdots),$$

und daher für den absoluten Betrag der Differenz dieser Summen:

$$|u_{m+r+1} + u_{m+r+2} + \cdots + u_{m+r+\sigma}| < \varepsilon \quad (\sigma = 1, 2, 3, \cdots),$$

oder, wenn man schließlich noch $m + r = n$ setzt:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+\sigma}| < \varepsilon \quad (\sigma = 1, 2, 3, \cdots),$$

anders geschrieben:

$$|s_{n+\sigma} - s_n| < \varepsilon \quad \text{für:}\ \sigma = 1, 2, 3, \cdots$$

in Übereinstimmung mit unserer früheren Konvergenzbedingung (5).[1])

---

1) *Unzulänglich* für die Konvergenz wäre es dagegen, wenn an Stelle der Bedingung (11) nur die folgende:

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,n+\varrho} = \lim_{n\to\infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+\varrho}) = 0$$

für jedes einzelne, übrigens aber beliebig *groß* zu denkende $\varrho$ erfüllt wäre. Denn dieser Bedingung würde offenbar schon genügt, wenn nur:

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} u_{n+2} = \cdots = \lim_{n\to\infty} u_{n+\varrho} = 0,$$

4. Setzt man in der *notwendigen und hinreichenden* Konvergenzbedingung (6b) speziell $\varrho = 1$, so erhält man als eine jedenfalls *notwendige* Konvergenzbedingung die folgende:

$$|s_{\nu+1} - s_\nu| < 2\varepsilon \quad \text{d. h.} \quad |u_{\nu+1}| < 2\varepsilon \quad (\text{für } \nu \geq n),$$

d. h.:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{12}$$

in Worten: die Glieder der Reihe müssen mit unbegrenzt wachsendem Index gegen *Null* konvergieren. Daß diese *notwendige* Bedingung aber keine für die Konvergenz *hinreichende* ist, erkennt man leicht an dem folgenden bemerkenswerten Beispiele. Es werde gesetzt:

$$u_0 = 0, \quad u_\nu = \frac{1}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

also:

$$s_n = \sum_1^n {}_\nu \frac{1}{\nu}. \tag{13}$$

Die entsprechende unendliche Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu}$, welche als die *harmonische* bezeichnet zu werden pflegt, besitzt dann offenbar die Eigenschaft, daß ihre Glieder schließlich gegen *Null* konvergieren, während sie selbst in folgender Weise als *divergent* erkannt wird. Man hat:

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{14}$$

---

d. h. schließlich:

$$\lim_{\nu\to\infty} u_\nu = 0,$$

was tatsächlich für die Konvergenz nicht ausreicht, wie in Nr. 4 des Textes gezeigt wird.

Es würde für die Konvergenz nicht einmal ausreichen, wenn in der obigen Bedingung $\varrho$ mit $n$ in irgendeiner speziellen von $n$ abhängigen Weise ins Unendliche wachsen dürfte. Setzt man z. B. für $\nu \geq 2$:

$$u_\nu = \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}$$

und $\varrho = pn$ (wo $p$ eine beliebige natürliche Zahl), so hat man:

$$R_{n, n+pn} = \sum_{n+1}^{n+pn} {}_\nu \frac{1}{\nu \lg \nu} < \frac{pn}{n \lg n} = \frac{p}{\lg n},$$

also:

$$\lim_{n\to\infty} R_{n, n+pn} = 0.$$

Nichtsdestoweniger ist die betreffende Reihe *divergent* (s. § 48, Nr. 3 am Ende, S. 328).

*wie groß* auch $n$ angenommen werden möge. Daraus folgt aber, daß $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ (da die *monoton* zunehmende Zahlenfolge $(s_\nu)$ nicht der Konvergenzbedingung (5) genügt). Wegen:

$$\sum_1^n {}_\nu \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu \frac{1}{\nu} \quad \text{und} \quad \sum_1^n {}_\nu \frac{1}{2\nu - 1} > \sum_1^n {}_\nu \frac{1}{2\nu}$$

ergibt sich dann weiter, daß auch die Reihe der reziproken *geraden* bzw. *ungeraden* Zahlen nach $+\infty$, also *eigentlich divergiert*.

Im übrigen hätten wir die *Divergenz* der *harmonischen* Reihe auch aus der früher bereits abgeleiteten Beziehung (s. § 34, S. 207, Gl. (7), (9)):

$$\text{(15)} \qquad \lim_{n\to\infty} (s_n - \lg(n+1)) = \gamma$$

erschließen können, da ja $\gamma$ eine endliche Zahl vorstellt und $\lim\limits_{n\to\infty} \lg(n+1) = +\infty$ ist, also auch $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ sein muß.

5. Die früher ausführlich betrachteten *unbegrenzten systematischen Brüche* stellen offenbar lediglich eine spezielle Klasse von *konvergenten unendlichen Reihen* vor. Eine Beziehung von der Form:

$$\text{(16)} \qquad \sigma = [\sigma_\nu] = \lim_{\nu\to\infty} \left(a_0 + \frac{a_1}{b} + \cdots + \frac{a_\nu}{b^\nu}\right)$$

könnte also jetzt durch die folgende ersetzt werden:

$$\text{(17)} \qquad \sigma = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a_\nu}{b^\nu}.$$

Ebenso definiert jede der beiden Zahlenfolgen $(n = 1, 2, 3, \cdots)$:

$$\text{(18)} \begin{cases} s_n = 1 + \sum\limits_1^n {}_\nu \dfrac{1}{\nu!}, & \text{wo: } \lim\limits_{n\to\infty} s_n = e \ \text{(§ 33, S. 204, Gl. (26))}, \\ \gamma_n = \sum\limits_1^n {}_\nu \left(\dfrac{1}{\nu} - \lg\left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)\right), & \text{wo: } \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma \ \text{(§ 34, S. 207, Gl. (8), (9))} \end{cases}$$

eine *konvergente unendliche Reihe*, sodaß man die in diesen Gleichungen enthaltenen Aussagen jetzt auch folgendermaßen schreiben kann:

$$\text{(19)} \begin{cases} e = 1 + \sum\limits_1^\infty {}_\nu \dfrac{1}{\nu!} = \sum\limits_0^\infty {}_\nu \dfrac{1}{\nu!} \quad \text{(§ 15, Gl. (9), S. 89)}, \\ \gamma = \sum\limits_1^\infty {}_\nu \left(\dfrac{1}{\nu} - \lg\left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)\right). \end{cases}$$

Ein einfaches Beispiel für *alle* in Nr. 1 für möglich erkannten Fälle der *Konvergenz* und *Divergenz* liefert sodann die unbegrenzte *geometrische Progression* $\sum_0^\infty {}_\nu\, \alpha^\nu$, wo $\alpha$ eine beliebige positive oder negative Zahl bedeutet. Aus der für jedes $\alpha$ geltenden Identität:

$$(1-\alpha)(1+\alpha+\cdots+\alpha^n) = 1-\alpha^{n+1}$$

folgt zunächst, daß für jeden Wert $\alpha$ außer $\alpha = 1$:

$$s_n = 1+\alpha+\cdots+\alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}. \tag{20}$$

Ist zunächst $|\alpha| < 1$, so hat man, wenn etwa:

$$|\alpha| = \frac{1}{1+\beta}, \quad \text{wo: } \beta > 0, \tag{21}$$

gesetzt wird:

$$\left|\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right| \leqq \frac{|\alpha|^{n+1}}{1-|\alpha|} \leqq \frac{1}{(1+\beta)^{n+1}} \cdot \frac{1+\beta}{\beta} < \frac{1}{\beta(1+n\beta)}, \tag{22}$$

und da der letzte Ausdruck durch Wahl eines hinlänglich großen Wertes von $n$ beliebig klein gemacht werden kann, so folgt aus Gl. (20), daß in diesem Falle:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-\alpha}, \tag{23}$$

d. h. die betreffende Reihe ist *konvergent* und ihre *Summe* $s = \frac{1}{1-\alpha}$. Ist dagegen $|\alpha| > 1$ und außerdem $\alpha > 0$, so kann man setzen:

$$\alpha = 1+\beta, \quad \text{wo: } \beta > 0, \tag{24}$$

und es ergibt sich:

$$-\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} = \frac{1}{\beta}(1+\beta)^{n+1} > \frac{1}{\beta}\cdot\{1+(n+1)\beta\}, \tag{25}$$

also:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty, \tag{26}$$

d. h. die Reihe ist alsdann *eigentlich divergent.*

Dies gilt übrigens auch noch im Falle $\alpha = 1$. Hier verliert zwar die sonst zur Darstellung von $s_n$ geltende Formel (20) ihre Gültigkeit. Man findet aber für $\alpha = 1$ ohne weiteres:

$$s_n = n+1, \quad \text{also: } \lim_{n\to\infty} s_n = \infty.\text{[1]} \tag{27}$$

---

1) Offenbar hätte man hieraus auch die eigentliche Divergenz von $\sum \alpha^\nu$ im Falle $\alpha > 1$ kürzer erschließen können, als mit Hilfe der Summationsformel (20).

Ist ferner $|\alpha| > 1$ und zugleich $\alpha < 0$, also etwa:

$$\alpha = -(1+\beta), \quad \text{wo: } \beta > 0, \tag{28}$$

so wird:

$$-\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} = (-1)^n \cdot \frac{(1+\beta)^{n+1}}{2+\beta}, \tag{29}$$

sodaß also $s_n$ absolut genommen mit $n$ ins Unendliche wächst. Dabei ist $s_n$ allemal *positiv*, wenn $n$ *gerade*, *negativ*, wenn $n$ *ungerade*: die Reihe *oszilliert* also in diesem Falle in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$.

Es bleibt schließlich noch der Fall $\alpha = -1$ zu untersuchen, für welchen zunächst aus Gl. (20) sich ergibt:

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2}. \tag{30}$$

Man hat also für *jedes ungerade* $n$: $s_n = 0$, dagegen für *jedes gerade* $n$: $s_n = 1$, und daher auch: $\varliminf\limits_{n\to\infty} s_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, sodaß also die Reihe in den Grenzen 0 und 1 *oszilliert*.

6. Unmittelbar aus der Definition einer *konvergenten* Reihe und den allgemeinen Regeln über das Rechnen mit Grenzwerten ergeben sich die folgenden Sätze:

1) Bedeutet $k$ eine beliebige positive oder negative Zahl, so *konvergiert gleichzeitig* mit der Reihe $\sum u_\nu$ auch die Reihe $\sum k \cdot u_\nu$ und man hat:

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, k \cdot u_\nu = k \cdot \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu. \tag{31}$$

Insbesondere ist also, wenn man $k = -1$ setzt:

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, (-u_\nu) = -\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu. \tag{32}$$

2) *Gleichzeitig* mit den beiden Reihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ *konvergiert* auch die folgende: $\sum (u_\nu + v_\nu)$ bzw. $\sum (u_\nu - v_\nu)$, und man hat:

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu \pm \sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu = \sum_0^\infty{}_\nu\, (u_\nu \pm v_\nu). \tag{33}$$

Das analoge gilt offenbar für *jede endliche Anzahl* von konvergenten Reihen.

3) Setzt man:

$$\begin{array}{llll}
u_0 & + u_1 & + \cdots + u_{m_1} & = U_1 \\
u_{m_1+1} & + u_{m_1+2} & + \cdots + u_{m_2} & = U_2 \\
. \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \\
u_{m_\nu+1} & + u_{m_\nu+2} & + \cdots + u_{m_{\nu+1}} & = U_{\nu+1} \\
. \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \, ,
\end{array}$$

so konvergiert mit der Reihe $\sum u_\nu$ auch die Reihe $\sum U_\nu$, und man hat:

$$\sum_1^\infty {}^\nu U_\nu = \sum_0^\infty {}^\nu u_\nu. \tag{34}$$

Denn setzt man: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = s_n$, $U_1 + U_2 + \cdots + U_n = S_n$, so wird:

$$S_\nu = s_{m_\nu}, \quad \text{also:} \quad \lim_{\nu\to\infty} S_\nu = \lim_{\nu\to\infty} s_{m_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} s_\nu.\text{[1]} \tag{35}$$

7. Wir wollen an dieser Stelle noch einer Bezeichnungsweise Erwähnung tun, von der wir später gelegentlich Gebrauch machen werden. Es bedeute:

$$u_{-1},\ u_{-2},\ u_{-3},\ \cdots$$

eine unbegrenzte Zahlenfolge, so geht aus dem in Nr. 1 gesagten hervor, was man unter der unendlichen Reihe: $\sum_1^\infty {}^\nu u_{-\nu}$ zu verstehen hat, und es bedarf auch keiner weiteren Erläuterung, daß man dieses letztere Symbol auch durch das folgende: $\sum_{-1}^{-\infty} {}^\nu u_\nu$ oder auch: $\sum_{-\infty}^{-1} {}^\nu u_\nu$ zu ersetzen pflegt.

Ist sodann noch die unendliche Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu u_\nu$ vorgelegt, so schreibt man konsequenter Weise:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^\nu u_\nu \quad \text{für:} \quad \sum_1^\infty {}^\nu u_{-\nu} + \sum_0^\infty {}^\nu u_\nu.$$

Eine Reihe von der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^\nu u_\nu$ heißt also *dann* und *nur* dann *konvergent*, wenn *jede* der beiden Reihen $\sum_1^\infty {}^\nu u_{-\nu}$, $\sum_0^\infty {}^\nu u_\nu$ *konvergiert*, in jedem anderen Falle *divergent*.

---

1) Man bemerke, daß dieser Satz *nicht schlechthin*, sondern nur in folgender Weise *umkehrbar* ist: Wenn außer der Reihe $\sum U_\nu$ auch die Reihe $\sum u_\nu$ *konvergiert*, so hat man:

$$\sum_0^\infty {}^\nu u_\nu = \sum_1^\infty {}^\nu U_\nu.$$

Dagegen braucht $\sum u_\nu$ noch *keineswegs* zu *konvergieren*, wenn auch $\sum U_\nu$ konvergiert; denn aus der Existenz eines bestimmten $\lim_{\nu\to\infty} s_{m_\nu}$ folgt ja noch keineswegs diejenige von $\lim_{\nu\to\infty} s_\nu$.

(Einfachstes Beispiel: $u_\nu = (-1)^\nu$, also $\sum_0^\infty {}^\nu u_\nu$, wie bereits gezeigt, in den Grenzen 0 und 1 *oszillierend*, dagegen $\sum_0^\infty {}^\nu (u_{2\nu} + u_{2\nu+1}) = 0$, also *konvergent*.)

Mit anderen Worten: Die Bedeutung des Symbols $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_\nu$ wird durch die Gleichung dargestellt:

$$(36)\qquad \begin{aligned}\sum_{-\infty}^{+\infty} u_\nu &= \lim_{m\to\infty} \sum_{1}^{m} u_{-\nu} + \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} u_\nu \\ &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{-m}^{+n} u_\nu,\end{aligned}$$

wo $m$ und $n$ *in ganz willkürlicher Weise* und *unabhängig voneinander* ins Unendliche wachsen. Wenn dieser letztere *Doppel*limes als endliche Zahl *existiert*, so fällt er offenbar mit dem *einfachen* Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{+n} u_\nu$ zusammen, und man hat *in diesem Falle:*

$$(37)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} u_\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{+n} u_\nu .$$

Dagegen darf man *nicht umgekehrt* diese letztere Beziehung als *Definitionsgleichung* für das Symbol $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_\nu$ betrachten und aus der *Existenz* und *Endlichkeit* des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{+n} u_\nu$ auf die *Konvergenz* der mit $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_\nu$ zu bezeichnenden Reihe schließen.

So ist z. B. $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\nu+1}$ *divergent*, da jede der beiden Reihen

$$\sum_{-1}^{-\infty} \frac{1}{2\nu+1} \left(= - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2\nu-1}\right) \quad \text{und} \quad \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1}$$

*divergiert.* Hingegen hat man:

$$\sum_{-n}^{+n} \frac{1}{2\nu+1} = - \sum_{1}^{n} \frac{1}{2\nu-1} + \sum_{0}^{n} \frac{1}{2\nu+1} = \frac{1}{2n+1},$$

also:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{+n} \frac{1}{2\nu+1} = 0.$$

## § 45. Anwendungen des Cauchyschen Grenzwertsatzes (§ 37) und seiner Verallgemeinerung auf unendliche Reihen.

1. Nach dem Cauchyschen Satze in § 37, Nr. 3 (S. 230, Gl. (14)) hat man:

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}),$$

sobald der *rechts* auftretende Grenzwert im weiteren Sinne *existiert.*

Ersetzt man jetzt $a_n$ durch $s_n$, wo:

(2) $$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \quad \text{also:} \quad s_n - s_{n-1} = u_n,$$

so nimmt Gl. (1) die Form an:

(3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n\to\infty} u_n,$$

oder auch (wegen: $\frac{s_n}{n} = \frac{s_n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$):

(4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} u_n,$$

in Worten:

*Das arithmetische Mittel einer unbegrenzt wachsenden Anzahl beliebiger reeller Zahlen $u_\nu$ besitzt den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, sobald dieser letztere im weiteren Sinne existiert.*

(Beispiele:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \lg \nu \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{\lg 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n} = \infty.)$$

Hierzu sei noch bemerkt, daß — geradeso wie bei der ursprünglichen Form des Satzes (1) (vgl. § 37, Nr. 3 am Schlusse) — die *Existenz* des *ersten* Grenzwertes *keineswegs umgekehrt* allemal diejenige des *zweiten* nach sich zieht.

(Beispiele: $u_\nu = (-1)^\nu$, also: $s_{2m-1} = 0$, $s_{2m} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$; dagegen: $\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n = -1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n = +1$.

Ferner: $u_\nu = (-1)^\nu \cdot \lg((\nu+1)(\nu+2))$, also:

$$s_{2m-1} = \lg \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2m-1) \cdot 2m}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots 2m \cdot (2m+1)} = -\lg(2m+1),$$

$$s_{2m} = \lg \frac{1 \cdot 2 \cdots (2m-1) \cdot 2m \cdot (2m+1) \cdot (2m+2)}{2 \cdot 3 \quad \cdots \quad 2m \cdot (2m+1)} = \lg(2m+2),$$

d. h. $s_n = (-1)^n \cdot \lg(n+2)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$; dagegen: $\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n = -\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n = +\infty$.)

2. Faßt man speziell den Fall ins Auge: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, so liefert die Relation (4) den folgenden Satz:

*Für jede unendliche Reihe mit schließlich gegen Null konvergierenden Gliedern $u_\nu$ ist:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = 0, \tag{5}$$

*insbesondere also auch dann, wenn die Reihe eigentlich divergiert oder ein unendliches Grenzintervall besitzt.*[1])

(Beispiel: $u_\nu = \frac{1}{\nu+1}$, also: $s_n = \sum_0^n {}_\nu \frac{1}{\nu+1}$ und: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n+1} = 0$, wie sich leicht mit Hilfe des Resultates § 34, S. 207, Gl. (9) verifizieren läßt. Darnach hat man nämlich: $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n - \lg(n+1)) = \gamma$, also: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n - \lg(n+1)}{n+1} = 0$, und wegen: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg(n+1)}{n+1} = 0$, schließlich auch: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n+1} = 0$.)

Schreibt man ferner in Gleichung (4) $s_\nu$ statt $u_\nu$, so ist die für ihre Gültigkeit erforderliche Bedingung, daß $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ im weiteren Sinne *existieren* solle, gleichbedeutend mit der *Konvergenz* oder *eigentlichen Divergenz* von $\sum_0^\infty {}_\nu u_\nu$. Man erhält also den Satz:

*Für jede konvergente oder eigentlich divergente Reihe $\sum u_\nu$ besteht die Beziehung:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = \sum_0^\infty {}_\nu u_\nu, \tag{6}$$

*oder anders geschrieben:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot u_0 + n\cdot u_1 + \cdots + 2u_{n-1} + 1\cdot u_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} (u_0 + u_1 + \cdots + u_n). \tag{6a}$$

Ist nun speziell $\sum u_\nu$ *konvergent*, also $\lim\limits_{n\to\infty} (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$ *eine bestimmte Zahl*, so läßt sich die letzte Beziehung auch in die folgende Form setzen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(u_0 + u_1 + \cdots + u_n - \frac{(n+1)u_0 + n\cdot u_1 + \cdots + 1\cdot u_n}{n+1}\right) = 0,$$

---

1) Im Falle der *Konvergenz* bzw. Existenz eines *endlichen* Grenzintervalls ist die Beziehung (5) offenbar selbstverständlich.

oder auch, wenn man alles unter den Nenner $n+1$ bringt und schließlich noch, der Symmetrie zu Liebe, diesen durch $n$ ersetzt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot u_1 + 2\cdot u_2 + \cdots + n\cdot u_n}{n} = 0. \tag{7}$$

3. Nach dem eben gesagten bestehen für jede *konvergente Reihe* $\sum_0^\infty {}_\nu u_\nu$, sofern man deren Summe mit $s$ bezeichnet, die *beiden* Beziehungen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = s \quad (\text{d. h.} = \text{irgendeiner bestimmten Zahl}), \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot u_1 + 2\cdot u_2 + \cdots + n\cdot u_n}{n} = 0. \tag{7}$$

Jede dieser Beziehungen ist also eine *notwendige* für die *Konvergenz*, aber keine *allein* erweist sich als *ausreichend*. Der Bedingung (6) genügen z. B. unendlich viele innerhalb *endlicher* Grenzen *oszillierende* Reihen, wie $\sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu$ [1]), der Bedingung (7) jede *divergente* Reihe, für welche $\lim_{n\to\infty} n\cdot u_n = 0$ ist.[2]) *Dagegen sind beide Bedingungen zusammen auch hinreichend dafür, daß $\sum_0^\infty {}_\nu u_\nu$ konvergiert, und zwar gegen die Summe $s$.* Ersetzt man nämlich in (6) den Index $n$ durch $n-1$ und beachtet, daß:

$$s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1} = nu_0 + (n-1)u_1 + \cdots + 1\cdot u_{n-1},$$

so folgt durch Addition von Gl. (7):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nu_0 + nu_1 + \cdots + n\cdot u_n}{n} = s,$$

d. h.:

$$\sum_0^\infty {}_\nu u_\nu = s.$$

---

1) Man findet in diesem Falle:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

2) Z. B. $u_n = \dfrac{1}{n\cdot \lg n}$, vgl. § 48, Nr. 3 am Ende (S. 328).

Es sei noch ausdrücklich bemerkt, daß aus (7) allemal folgt:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Ersetzt man nämlich in Gl. (7) $n$ durch $(n-1)$, so folgt, daß für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ bei passender Fixierung einer unteren Schranke für $n$ die Ungleichung besteht:

$$|1\cdot u_1 + 2\cdot u_2 + \cdots + (n-1)\cdot u_{n-1}| < (n-1)\varepsilon.$$

Da sodann auch:

$$|1\cdot u_1 + 2\cdot u_2 + \cdots + (n-1)\cdot u_{n-1} + n\cdot u_n| < n\varepsilon,$$

so folgt durch Subtraktion:

$$|n\cdot u_n| < (2n-1)\varepsilon, \quad \text{also *a fortiori*:} \quad |u_n| < 2\varepsilon,$$

d. h. schließlich:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

4. Die Konvergenzbedingung (7) gestattet noch die folgende Verallgemeinerung. Nach dem allgemeinen Grenzwertsatze § 37, Nr. 4 (S. 231, Gl. (17), (18)) hat man:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, \tag{8}$$

falls der *rechts* auftretende Grenzwert *endlich* ausfällt und die $b_\nu$ den Bedingungen genügen:

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{1}{b_n}\right| \cdot \sum_1^n{}_\nu |b_\nu - b_{\nu-1}| < \infty. \tag{9}$$

Setzt man jetzt:

$$\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{b_\nu - b_{\nu-1}} = s_{\nu-1}, \quad \text{also:} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n, \tag{10}$$

so hat man zunächst:

$$a_\nu - a_{\nu-1} = (b_\nu - b_{\nu-1})\cdot s_{\nu-1},$$

und, wenn man hier der Reihe nach $\nu = 1, 2, \cdots, n$ substituiert und die betreffenden Gleichungen addiert:

$$a_n = a_0 + \sum_1^n{}_\nu (b_\nu - b_{\nu-1})\cdot s_{\nu-1}. \tag{11}$$

Durch Einführung der Beziehungen (10) und (11) in Gl. (8) nimmt der obige Grenzwertsatz, wenn man noch beachtet, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_0}{b_n} = 0$ zu

setzen ist, die folgende Form an:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_1^n{}^{\nu} (b_\nu - b_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1} = \lim_{n\to\infty} s_n, \tag{12}$$

sofern $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ als *endliche* Zahl *existiert* und die $b_\nu$ den Bedingungen (9) genügen.

Die auf der linken Seite von Gl. (12) auftretende Summe läßt sich nun aber in folgender Weise umformen[1]):

$$\begin{aligned}\sum_1^n{}^{\nu} (b_\nu - b_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1} &= \sum_1^n{}^{\nu} b_\nu s_{\nu-1} - \sum_1^n{}^{\nu} b_{\nu-1} s_{\nu-1} \\ &= \sum_1^n{}^{\nu} b_\nu s_{\nu-1} - \sum_0^{n-1}{}^{\nu} b_\nu s_\nu \\ &= \sum_1^n{}^{\nu} b_\nu (s_{\nu-1} - s_\nu) + b_n s_n - b_0 s_0 \\ &= b_n s_n - \left(b_0 s_0 + \sum_1^n{}^{\nu} b_\nu (s_\nu - s_{\nu-1})\right).\end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \cdot \sum_1^n{}^{\nu} (b_\nu - b_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1} = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\left(b_0 s_0 + \sum_1^n{}^{\nu} b_\nu (s_\nu - s_{\nu-1})\right), \tag{13}$$

und somit durch Vergleichung mit (12):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\left(b_0 s_0 + \sum_1^n{}^{\nu} b_\nu (s_\nu - s_{\nu-1})\right) = 0. \tag{14}$$

Setzt man schließlich noch:

$$s_0 = u_0, \quad \text{im übrigen:} \quad s_\nu - s_{\nu-1} = u_\nu,$$

also:

$$s_\nu = u_0 + u_1 + \cdots + u_\nu,$$

sodaß jetzt die vorausgesetzte *Existenz* eines *endlichen* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ mit der *Konvergenz* der Reihe $\sum u_\nu$ zusammenfällt, so liefert Gl. (14) die folgende Verallgemeinerung des Satzes Gl. (7):

*Für jede konvergente Reihe $\sum u_\nu$ ist:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_0 u_0 + b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n}{b_n} = 0, \tag{15}$$

*sofern die $b_\nu$ den Bedingungen* (9) *genügen.*

---

1) Über die hierbei benützte, von Abel herrührende Transformationsmethode vgl. § 59, Nr. 4.

Da das letztere speziell für jede positive, mit $\nu$ *monoton* (niemals abnehmend) ins Unendliche wachsende Zahlenfolge $(M_\nu)$ der Fall ist[1]), so ergibt sich noch:

*Für jede konvergente Reihe* $\sum u_\nu$ *ist:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_0 u_0 + M_1 u_1 + \cdots + M_n u_n}{M_n} = 0. \tag{16}$$

Die spezielle Annahme $M_\nu = \nu$ führt dann wiederum auf Gl. (7) zurück.

## Kapitel II.

# Reihen mit lauter positiven Gliedern.

## § 46. Allgemeine Eigenschaften. — Unbedingte Konvergenz. — Summen unendlich vieler Reihen mit positiven Gliedern.

1. Wir betrachten zunächst unendliche Reihen von der Form $\sum a_\nu$, wo für jeden endlichen Wert $\nu$ des Stellenzeigers: $a_\nu > 0$ ist.[2]) Eine solche Reihe kann offenbar nur *konvergieren* oder *eigentlich divergieren* (nämlich nach $+\infty$). Denn die Zahlen $s_n = \sum_0^n {}_\nu\, a_\nu$ bilden hier eine mit wachsendem $n$ *monoton zunehmende* Folge, sodaß $\lim_{n\to\infty} s_n$ entweder einen *bestimmten positiven Wert* besitzt oder *positiv unendlich groß* wird.

Daraus folgt insbesondere, daß bei Reihen dieser Art stets auf die *Konvergenz* von $\sum a_\nu$ geschlossen werden kann, sobald nur feststeht, daß $\sum_0^n {}_\nu\, a_\nu$ für alle Werte von $n$ *unter einer festen Schranke* bleibt.

Und ferner: Ist $\sum a_\nu$ *konvergent*, so *konvergiert* auch jede Reihe von der Form $\sum a_{m_\nu}$, wenn $(m_\nu)$ eine beliebige aus der Reihe der Zahlen $\nu$ *herausgehobene* Zahlenfolge bedeutet.

1) Vgl. § 37, S. 281, Fußn. 1.

2) Der Vollständigkeit halber sei bemerkt, daß die Resultate dieses Paragraphen offenbar auch gültig bleiben, wenn eine *beliebige* (eventuell auch *unbegrenzte*) Anzahl von Gliedern $a_\nu = 0$ ist. Das gleiche gilt bezüglich der sog. Divergenz- und Konvergenzkriterien *erster* Art (s. den folgenden Paragraphen), während bei der Bildung der Kriterien *zweiter* Art die $a_\nu$ als durchweg *von Null verschieden* anzunehmen sind.

Während hiernach jede aus einer *konvergenten* Reihe (mit positiven Gliedern) herausgehobene Reihe wiederum *konvergiert*, so darf man nicht etwa schließen, daß jede aus einer *divergenten* Reihe $\sum a_\nu$ herausgehobene Reihe auch *divergieren* müsse. Dies gilt nur dann ohne weiteres, wenn die Glieder $a_\nu$ stets *oberhalb* einer festen Schranke bleiben. Ist dagegen $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ oder auch nur $\varliminf\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, so lassen sich aus der *divergenten* Reihe $\sum a_\nu$ stets auch (unbegrenzt viele) *konvergente* Reihen herausheben. Denn nimmt man eine konvergente Reihe $\sum c_\nu$ mit positiven Gliedern ganz willkürlich an, so kann man aus der Folge $(a_\nu)$ eine andere $(a_{m_\nu})$ so herausheben, daß $a_{m_\nu} < c_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ und daher $\sum a_{m_\nu}$ *konvergiert*. (So lassen sich z. B. aus der *divergenten* Reihe $\sum\limits_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu}$ unendlich viele *konvergente* Reihen von der Form $\sum\limits_0^\infty{}_\nu \frac{1}{m^\nu}$ herausheben, wo $m$ jede ganze Zahl $> 1$ bedeuten kann.)

2. Es erscheint wichtig, festzustellen, daß die *Konvergenz* einer Reihe der betrachteten Art, sowie auch der *Wert ihrer Summe* durchaus *unabhängig* ist von der *Anordnung* der Glieder, d. h.: Ist $\sum\limits_0^\infty{}_\nu a_\nu = A$, so ist auch stets $\sum\limits_0^\infty{}_\nu a_{n_\nu} = A$, wenn man unter $(n_\nu)$ eine Zahlenfolge versteht, die aus der Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \cdots, \nu, \cdots$ in der Weise hervorgegangen ist, daß *jede* Zahl $\nu$ *einmal* und *nur* einmal in der Reihe der Zahlen $n_\nu$ vorkommt.

Man pflegt dieses kürzer so auszusprechen: *Eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern ist stets* u n b e d i n g t *konvergent.*

Um dies nachzuweisen, werde gesetzt:

$$\sum_0^k{}_\nu a_\nu = A_k, \quad \sum_0^k{}_\nu a_{n_\nu} = A_k'. \tag{1}$$

Bedeutet dann $\mu$ eine beliebig große positive ganze Zahl, so kann man stets eine positive Zahl $\nu \geqq \mu$ finden, sodaß $A_\nu$ *alle* Glieder enthält, welche in $A_\mu'$ vorkommen. Daher ist für *jedes* $\mu$:

$$A_\mu' \leqq A_\nu < A, \tag{2}$$

woraus sofort die Existenz eines bestimmten $\lim\limits_{\mu\to\infty} A_\mu' = A'$, also die *Konvergenz* von $\sum a_{n_\nu}$ resultiert. Zugleich ergibt sich aus Ungl. (2), daß:

$$A' \leqq A. \tag{3}$$

Andererseits kann man, nachdem jetzt die *Konvergenz* der Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu a_{n_\nu}$ bereits feststeht, die ursprüngliche Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu$ als eine *Umordnung* dieser letzteren betrachten und sodann in analoger Weise erschließen, daß:

$$(4) \qquad A \leqq A'.$$

Durch Kombination von (3) und (4) ergibt sich daher:

$$(5) \qquad A' = A,$$

d. h. schließlich:

$$(6) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu a_{n_\nu} = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu,$$

womit die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung erwiesen ist.

Zugleich folgt hieraus ohne weiteres, daß eine Reihe mit positiven Gliedern, welche in *irgendeiner* Anordnung *divergiert*, in *jeder* Anordnung *divergieren* muß.

3. Man kann den Begriff der „*Umordnung*" einer unendlichen Reihe auch noch wesentlich weiter fassen, als zuvor. Jede unendliche Reihe läßt sich ja — nach Art jeder beliebigen unbegrenzten Zahlenfolge (s. § 39, S. 247) — in irgendeine *bestimmte* oder auch in eine *unbegrenzte* Anzahl von unendlichen Reihen zerlegen (z. B. $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu$ in die $n$ Partialreihen: $\sum_0^\infty {}^\mu a_{n\mu}, \sum_0^\infty {}^\mu a_{n\mu+1}, \cdots, \sum_0^\infty {}^\mu a_{n\mu+(n-1)}$; oder, mit Benützung des Beispiels in § 39, Nr. 1 (S. 249), in die *unbegrenzte* Anzahl von Partialreihen: $\sum_0^\infty {}^\mu a_{2\mu}, \sum_0^\infty {}^\mu a_{4\mu+1}, \sum_0^\infty {}^\mu a_{8\mu+3}, \cdots, \sum_0^\infty {}^\mu a_{2^{\nu+1}\mu+2^\nu-1}, \cdots$), deren Gesamtheit zunächst rein formal eine *Umordnung* der ursprünglichen Reihe darstellt, insofern die Glieder beider Anordnungen *sich gegenseitig eindeutig entsprechen.* Es besteht dann aber auch der folgende Satz:

*Zerlegt man eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern: $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu = A$ in eine bestimmte oder unbegrenzte Anzahl ($n$ bzw. $\infty$) von Partialreihen, so konvergiert jede derselben gegen eine bestimmte*

*Summe* $A^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$, *und die Gesamtsumme der* $A^{(\nu)}$ *besitzt den Wert* $A$, *d. h. es ist:*

$$\sum_0^n{}_\nu A^{(\nu)} = A \quad \text{bzw.} \quad \sum_0^\infty{}_\nu A^{(\nu)} = A.$$

Um diesen Satz gleich für den allgemeineren Fall einer *unbegrenzten* Anzahl von Partialreihen zu beweisen, möge die vorgenommene Zerlegung von $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu$ durch das folgende Schema dargestellt werden:

$$(7) \quad \begin{cases} \quad (a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + \cdots + a_\mu^{(0)} + \cdots) \\ + (a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \cdots + a_\mu^{(1)} + \cdots) \\ + (a_0^{(2)} + a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \cdots + a_\mu^{(2)} + \cdots) \\ + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + (a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_\mu^{(\nu)} + \cdots) \\ + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

wobei allgemein:

$$(8) \qquad a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_\mu^{(\nu)} = A_\mu^{(\nu)} \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \cdots \\ \nu = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix}$$

gesetzt werden möge.

Alsdann folgt zunächst aus der *Konvergenz* der ursprünglichen Reihe, daß auch *jede* Partialreihe, insbesondere jede solche, welche eine *Zeile* des obigen Schemas bildet, *konvergieren* muß, sodaß man setzen kann:

$$(9) \qquad \sum_0^\infty{}_\mu a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu \to \infty} A_\mu^{(\nu)} = A^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Man kann nun wiederum einer beliebig klein vorgeschriebenen positiven Zahl $\varepsilon$ eine positive ganze Zahl $p$ so zuordnen, daß:

$$(10) \qquad A - A_p < \varepsilon \quad \left(\text{wo: } A_p = \sum_0^p{}_\nu a_\nu\right)$$

wird, sodann zwei positive ganze Zahlen $m$, $n$ so fixieren, daß der Ausdruck:

$$A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \cdots + A_m^{(n)}$$

(d. h. diejenige Summe des Schemas (7), welche begrenzt wird durch die Glieder der $(m + 1)^{\text{ten}}$ Kolonne und der $(n + 1)^{\text{ten}}$ Zeile) und umsomehr der folgende:

$$A_\mu^{(0)} + A_\mu^{(1)} + \cdots + A_\mu^{(\nu)} \quad \text{für: } \mu \geqq m, \ \nu \geqq n$$

*alle* Glieder enthält, welche in $A_p$ vorkommen. Man hat also mit Berücksichtigung von Ungl. (10):

$$(11)\quad A_\mu^{(0)} + A_\mu^{(1)} + \cdots + A_\mu^{(\nu)} \geqq A_p > A - \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n.$$

Andererseits enthält diese Summe nur eine *begrenzte* Anzahl von Gliedern aus der Reihe $\sum a_\nu$ und liegt daher sicher unterhalb $A$, sodaß die doppelte Ungleichung besteht:

$$(12)\qquad A > A_\mu^{(0)} + A_\mu^{(1)} + \cdots + A_\mu^{(\nu)} > A - \varepsilon \quad (\mu \geqq m,\ \nu \geqq n).$$

Läßt man hier $\mu$ über alle Grenzen wachsen, so folgt mit Benützung der in Gl. (9) eingeführten Bezeichnung:

$$(13)\qquad A > A^{(0)} + A^{(1)} + \cdots + A^{(\nu)} > A - \varepsilon \quad (\nu \geqq n).$$

(NB. Man müßte eigentlich nach der für solche Grenzübergänge geltenden Regel zunächst schreiben: $A \geqq A^{(0)} + \cdots + A^{(\nu)}$. Das *Gleichheits*zeichen erscheint indessen, falls wirklich *unbegrenzt* viele nicht durchweg aus Nullen bestehende Partialreihen vorhanden sind, für jedes *bestimmte* $\nu$ definitiv ausgeschlossen, da ja $A^{(0)} + \cdots + A^{(\nu)}$ für jeden *größeren* Wert $\nu$ wiederum noch *zunimmt.*)

Für $\nu \longrightarrow \infty$ ergibt sich, da infolge der Monotonie von

$$A^{(0)} + A^{(1)} + \cdots + A^{(\nu)}$$

der betreffende Grenzwert sicher *existiert,* des weiteren aus Ungl. (13):

$$(14)\qquad A \geqq \sum_0^\infty{}_\nu A^{(\nu)} > A - \varepsilon$$

und, da $\varepsilon$ beliebig klein gemacht werden kann, schließlich:

$$(15)\qquad \sum_0^\infty{}_\nu A^{(\nu)} = A.$$

Setzt man hier noch für $A^{(\nu)}$ seinen Wert ein und schreibt:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu a_\mu^{(\nu)} \quad \text{statt:} \quad \sum_0^\infty{}_\nu \left( \sum_0^\infty{}_\mu a_\mu^{(\nu)} \right),$$

so nimmt Gl. (15) die Form an:

$$(15\text{a})\qquad \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu a_\mu^{(\nu)} = A.$$

Sind im ganzen nur $n$ Partialreihen vorhanden, so tritt offenbar an die Stelle der Ungleichung (12) die folgende:

$$A > A_\mu^{(0)} + A_\mu^{(1)} + \cdots + A_\mu^{(n)} > A - \varepsilon \quad (\mu \geqq m),$$

woraus dann für $\mu \longrightarrow \infty$ folgt:

$$A \geqq A^{(0)} + A^{(1)} + \cdots + A^{(n)} > A - \varepsilon,$$

und schließlich:

$$\text{(15b)} \qquad \sum_0^n {}_\nu A^{(\nu)} = \sum_0^n {}_\nu \sum_0^\infty {}_\mu a_\mu^{(\nu)} = A.$$

Hiermit ist zunächst der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Man bemerke ferner, daß das analoge Resultat offenbar auch gilt, wenn man in dem Schema (7) zunächst jede *Kolonne* zu einer (wegen der Konvergenz von $\sum a_\nu$ stets konvergierenden) Reihe:

$$\text{(16)} \qquad \sum_0^\infty {}_\nu a_\mu^{(\nu)} = A_\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots)$$

zusammenfaßt. Alsdann wird auch:

$$\text{(17)} \qquad \sum_0^\infty {}_\mu A_\mu = \sum_0^\infty {}_\mu \sum_0^\infty {}_\nu a_\mu^{(\nu)} = A.$$

Die vorstehenden Resultate sind zunächst noch insofern einer Verallgemeinerung fähig, als man jede der Reihen $\sum a_\mu^{(\nu)}$ wiederum in eine endliche oder unendliche Anzahl von Partialreihen zerlegt denken kann usf. Es folgt dann in ganz analoger Weise, daß bei beliebiger Anordnung der wachsenden Summationen immer wieder der Wert $A$ zum Vorschein kommen muß.

4. Es erscheint zweckmäßig, an die vorstehende Untersuchung noch die folgenden Bemerkungen zu knüpfen.

Es sei statt der *einfach unendlichen* Reihe $\sum a_\nu$ von vornherein das *zweifach unendliche* Schema vorgelegt:

$$\text{(18)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \quad a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_\mu^{(0)} + \cdots \\ + a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \cdots + a_\mu^{(1)} + \cdots \\ + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} + \cdots + a_\mu^{(\nu)} + \cdots \\ + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right.$$

Wenn dann jede *Zeile* bzw. jede *Kolonne* eine *konvergente* Reihe bildet und die *Reihe* der *Zeilensummen* bzw. der *Kolonnensummen* gleichfalls konvergiert, sodaß also:

$$(18\text{a})\quad \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu a_\mu^{(\nu)} = A, \qquad \textit{bzw.} \qquad (18\text{b})\quad \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu a_\mu^{(\nu)} = A,$$

so stellt das Schema (18), in diesem Sinne genommen, eine *konvergente* Reihe vor, deren *einzelne Glieder* selbst wiederum *konvergente Reihen* sind.

Andererseits kann man die Glieder des Schemas (18) auf unendlich viele Arten zu einer *einfach-unendlichen* Reihe anordnen, am einfachsten, indem man dieselben *„nach Diagonalen“* geordnet anschreibt:

$$(19)\quad a_0^{(0)} + a_0^{(1)} + a_1^{(0)} + a_0^{(2)} + a_1^{(1)} + a_2^{(0)} + \cdots$$
$$\cdots + a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \cdots + a_\nu^{(0)} + \cdots$$

oder auch, indem man die Glieder jeder „Diagonale“ zu einem einzigen zusammenfaßt:

$$(20)\quad \sum_0^\infty{}_\nu b_\nu, \quad \text{wo: } b_\nu = a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \cdots + a_\nu^{(0)}.$$

Dann läßt sich zeigen, daß diese aus den sämtlichen Gliedern des Schemas (18) gebildete einfach unendliche Reihe gleichfalls gegen den Wert $A$ konvergiert, sobald *eine* der Gleichungen (18a), (18b) als gültig vorausgesetzt wird.[1]) Besteht z. B. die Gl. (18a), so hat man:

$$(21\text{a})\quad \sum_0^n{}_\nu b_\nu < \sum_0^n{}_\nu \sum_0^n{}_\mu a_\mu^{(\nu)} < \sum_0^n{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu a_\mu^{(\nu)} < A,$$

und analog, wenn Gl. (18b) gilt:

$$(21\text{b})\quad \sum_0^n{}_\nu b_\nu < \sum_0^n{}_\mu \sum_0^n{}_\nu a_\mu^{(\nu)} < \sum_0^n{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu a_\mu^{(\nu)} < A,$$

sodaß also die aus lauter positiven Gliedern bestehende Summe $\sum_0^n{}_\nu b_\nu$ stets unter einer endlichen Grenze bleibt und somit die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu b_\nu$ zunächst *konvergiert*, wobei es freisteht, auch die *einzelnen Glieder* $a_\mu^{(\nu)}$ als *Glieder* der

1) Daraus folgt dann mit Benützung des Satzes von Nr. 2, daß *jede* einfach unendliche Reihe, welche die sämtlichen Glieder des Schemas (18) enthält, *gegen die Summe A konvergiert.* Denn jede solche Reihe kann ja als eine Umordnung der Reihe (19) im Sinne von Nr. 2 angesehen werden.

Reihe aufzufassen (Schema (19)). Faßt man jetzt aber das Schema (18) als eine *Zerlegung* der nunmehr als *konvergent* erkannten *einfachen* Reihe (19) auf, so folgt unmittelbar aus den Ergebnissen der vorigen Nummer, daß:

$$(22)\qquad \sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu \left\{ \begin{array}{l} = \sum\limits_0^\infty{}_\nu \sum\limits_0^\infty{}_\mu\, a_\mu^{(\nu)} \\ = \sum\limits_0^\infty{}_\mu \sum\limits_0^\infty{}_\nu\, a_\mu^{(\nu)} \end{array} \right\} \text{ d. h. } = A,$$

womit die fragliche Behauptung erwiesen ist.

Da im übrigen, falls an Stelle der Gleichung (18a) oder (18b) die Gleichung: $\sum\limits_0^\infty{}_\nu\, b_\nu = A$ *vorausgesetzt* wird, die Existenz der beiden Gleichungen (18a), (18b) wieder ohne weiteres aus der vorigen Nummer folgt, so kann man die bisherigen auf die Konvergenz des Schemas (18) bezüglichen Resultate in folgender Weise zusammenfassen:

*Von den drei Gleichungen:*

$$(23)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_0^\infty{}_\nu \left(a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \cdots + a_{\nu-1}^{(1)} + a_\nu^{(0)}\right) = A & \textit{(Reihe der Diagonalen)} \\ \sum\limits_0^\infty{}_\nu \sum\limits_0^\infty{}_\mu\, a_\mu^{(\nu)} = A & \textit{(Reihe der Zeilensummen)} \\ \sum\limits_0^\infty{}_\mu \sum\limits_0^\infty{}_\nu\, a_\mu^{(\nu)} = A & \textit{(Reihe der Kolonnensummen)} \end{array} \right.$$

*zieht jede einzelne die Existenz der beiden anderen nach sich.*

## § 47. Prinzip der Reihenvergleichung. — Allgemeine Form von Divergenz- und Konvergenzkriterien.

1. Zur Feststellung der *Divergenz* oder *Konvergenz* einer beliebig vorgelegten Reihe (mit positiven Gliedern) dient die Vergleichung ihrer Glieder mit denjenigen einer *bereits als divergent oder konvergent erkannten* Reihe.

Bezeichnet man generell das *„allgemeine"*, d. h. zu einem beliebigen Index $\nu$ gehörige Glied einer als

$$\textit{divergent} \text{ erkannten Reihe mit } d_\nu \text{ oder } \frac{1}{D_\nu},$$
$$\textit{konvergent} \text{ „ „ „ } c_\nu \text{ „ } \frac{1}{C_\nu},$$

so ist leicht zu ersehen, daß eine beliebig vorgelegte Reihe $\sum a_\nu$ allemal

$$\left.\begin{array}{llll} (1\text{a}) & \textit{divergiert}, & \text{wenn:} & a_{\nu+p} \geqq g \cdot d_\nu \\ (1\text{b}) & \textit{konvergiert}, & \text{wenn:} & a_{\nu+p} \leqq G \cdot c_\nu \end{array}\right\} \text{ für } \nu \geqq n.$$

Dabei bedeutet $n$ eine beliebige, aber feste ganze Zahl $\geqq 0$, $p$ eine gleichfalls beliebige, aber feste *positive* oder *negative* ganze Zahl einschließlich der *Null*; $g$ und $G$ endliche, wesentlich *positive* Zahlen, von denen übrigens die *erstere* beliebig *klein*, die *zweite* beliebig *groß* angenommen werden darf.

Setzt man nämlich in jeder der obigen Ungleichungen der Reihe nach: $\nu = n, n+1, \cdots, (n+\varrho)$, so folgt durch Addition der entsprechenden Ungleichungen:

$$\text{aus (1a):} \qquad \sum_n^{n+\varrho}{}_\nu\, a_{\nu+p} \geqq g \cdot \sum_n^{n+\varrho}{}_\nu\, d_\nu,$$

$$\text{aus (1b):} \qquad \sum_n^{n+\varrho}{}_\nu\, a_{\nu+p} \leqq G \cdot \sum_n^{n+\varrho}{}_\nu\, c_\nu,$$

d. h. $\sum_n^{n+\varrho}{}_\nu\, a_{\nu+p}$ wird infolge der über die $d_\nu$ und $c_\nu$ gemachten Voraussetzungen im *ersten* Falle durch Wahl von $n$ beliebig *groß*, im *zweiten* beliebig *klein*, woraus die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung hervorgeht.[1])

Setzt man die Ungleichungen (1a), (1b) in die Form

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{ll} D_\nu \cdot a_{\nu+p} \geqq g: & \textit{Divergenz} \\ C_\nu \cdot a_{\nu+p} \leqq G: & \textit{Konvergenz} \end{array}\right\} (\nu \geqq n),$$

so lassen sich diese wiederum noch durch die folgenden ersetzen:

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \underline{\lim}_{\nu \to \infty} D_\nu \cdot a_{\nu+p} > g, \text{ d. h. } > 0 & : \textit{Divergenz}, \\ \overline{\lim}_{\nu \to \infty} C_\nu \cdot a_{\nu+p} < G, \text{ d. h. } \textit{nicht } \infty: & \textit{Konvergenz}, \end{array}\right.$$

1) Man kann dieses Resultat auch folgendermaßen aussprechen:
*Gleichzeitig* mit den Reihen $\sum d_\nu$, $\sum c_\nu$ *divergieren* bzw. *konvergieren* auch die folgenden: $\sum g_\nu d_\nu$, $\sum G_\nu c_\nu$, wenn die $g_\nu \geqq g > 0$, die $G_\nu \leqq G < \infty$.

oder etwas kürzer geschrieben (vgl. § 36, S. 220, Ungl. (40)):

$$(4)\quad \begin{cases} \underline{\lim}_{\nu\to\infty} D_\nu \cdot a_{\nu+p} > 0: & \textit{Divergenz}, \\ \overline{\lim}_{\nu\to\infty} C_\nu \cdot a_{\nu+p} < \infty: & \textit{Konvergenz.}^{1)} \end{cases}$$

Die in den Ungleichungen (1)—(4) zur Entscheidung der Divergenz oder Konvergenz von $\sum a_\nu$ dienlichen Beziehungen werden als *Divergenz-* bzw. *Konvergenzkriterien* und zwar zum Unterschiede von sogleich noch näher zu definierenden anderen Formen als Kriterien *erster Art* bezeichnet.

Ein Kriterium von der Form (4) wird offenbar *versagen,* falls für die getroffene Wahl der $D_\nu$, $C_\nu$ gleichzeitig:

$$(5)\quad \begin{cases} \lim_{\nu\to\infty} D_\nu \cdot a_{\nu+p} = 0, \\ \overline{\lim}_{\nu\to\infty} C_\nu \cdot a_{\nu+p} = \infty. \end{cases}$$

Die *Möglichkeit,* in einem solchen Falle *wirksamere* Kriterien aufzustellen, wird gegeben sein, sofern es gelingt, stets eine *divergente* Reihe $\sum \frac{1}{D_\nu'}$, bzw. eine *konvergente* $\sum \frac{1}{C_\nu'}$ anzugeben, sodaß:

$$(6)\qquad D_\nu' > D_\nu, \quad C_\nu' < C_\nu,$$

und daher auch:

$$(7)\quad \begin{cases} D_\nu' \cdot a_{\nu+p} > D_\nu \cdot a_{\nu+p}, & \text{also } \textit{möglicherweise:}\ \underline{\lim}_{\nu\to\infty} D_\nu' \cdot a_{\nu+p} > 0, \\ C_\nu' \cdot a_{\nu+p} < C_\nu \cdot a_{\nu+p}, & \text{"} \qquad \text{"} \qquad \overline{\lim}_{\nu\to\infty} C_\nu' \cdot a_{\nu+p} < \infty. \end{cases}$$

---

1) Anders ausgesprochen: Jede Beziehung von der Form:

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} D_\nu \cdot a_{\nu+p} = 0$$

bildet eine *notwendige* Bedingung für die *Konvergenz,* jede von der Form:

$$\overline{\lim}_{\nu\to\infty} C_\nu \cdot a_{\nu+p} = \infty$$

eine *notwendige* Bedingung für die *Divergenz* der Reihe $\sum a_\nu$. Dabei muß also, wenn die betreffenden *Grenzwerte* überhaupt *existieren,* im ersten Falle geradezu:

$$\lim_{\nu\to\infty} D_\nu \cdot a_{\nu+p} = 0,$$

im zweiten:

$$\lim_{\nu\to\infty} C_\nu \cdot a_{\nu+p} = \infty$$

sein.

2. Statt die Glieder $a_{\nu+p}$ direkt mit den $d_\nu$, $c_\nu$ zu vergleichen, ist es nicht selten *für die Rechnung bequemer*, den Quotienten $\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}$ (welcher offenbar über die relative Ab- oder Zunahme der Reihenglieder entscheidet) mit $\frac{d_\nu}{d_{\nu+1}}$ bzw. $\frac{c_\nu}{c_{\nu+1}}$ in Beziehung zu setzen. Hierzu soll der folgende Hilfssatz dienen:

*Sind $(p_\nu)$, $(q_\nu)$ zwei unbegrenzte Folgen positiver Zahlen (die für $\nu \to \infty$ auch den Grenzwert 0 haben dürfen) und ist für $\nu \geqq n$:*

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} \geqq \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu}, \tag{8}$$

*so gilt für $\nu \geqq n$ die Beziehung:*

$$p_\nu \geqq k \cdot q_\nu, \tag{9}$$

*wo $k$ eine gewisse positive Zahl bedeutet.*

Beweis. Aus der Voraussetzung (8) folgt zunächst für $\nu \geqq n$:

$$\frac{p_{\nu+1}}{q_{\nu+1}} \geqq \frac{p_\nu}{q_\nu},$$

und daher, wenn man $\nu$ sukzessive die Werte $n, (n+1), \cdots, (n+\varrho-1)$ beilegt:

$$\frac{p_{n+\varrho}}{q_{n+\varrho}} \geqq \frac{p_{n+\varrho-1}}{q_{n+\varrho-1}} \geqq \cdots \geqq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \geqq \frac{p_n}{q_n},$$

oder, wenn man $\frac{p_n}{q_n} = k$ setzt:

$$\frac{p_{n+\varrho}}{q_{n+\varrho}} \geqq k \quad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots),$$

also:

$$p_\nu \geqq k \cdot q_\nu \quad (\nu \geqq n).$$

3. Von dem eben bewiesenen Hilfssatze machen wir nun in der Weise Gebrauch, daß wir einmal $p_\nu = a_{\nu+p}$, $q_\nu = D_\nu^{-1}$, das andere Mal $p_\nu = C_\nu^{-1}$, $q_\nu = a_{\nu+p}$ setzen.

Alsdann ergibt sich: Ist für $\nu \geqq n$

$$(10)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}} \geqq \dfrac{D_\nu}{D_{\nu+1}}, \text{ so folgt für } \nu \geqq n\text{: } a_{\nu+p} \geqq k \cdot D_\nu^{-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{d. h. } \sum a_\nu \textit{ divergiert}, \\ \dfrac{C_\nu}{C_{\nu+1}} \geqq \dfrac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}}, \text{ so folgt für } \nu \geqq n\text{: } C_\nu^{-1} \geqq k \cdot a_{\nu+p}, \\ \qquad\qquad \text{also: } a_{\nu+p} \leqq \dfrac{1}{k} \cdot C_\nu^{-1}, \text{ d. h. } \sum a_\nu \textit{ konvergiert}. \end{array}\right.$$

Oder, anders geschrieben, es folgt aus:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &D_\nu \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1} \leqq 0: \quad \textit{Divergenz} \\ &C_\nu \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1} \geqq 0: \quad \textit{Konvergenz} \end{aligned}\right. \qquad (\nu \geqq n).$$

Daraus gewinnt man als *hinreichende* Bedingungen:

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\text{für die } \textit{Divergenz}: \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \left(D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1}\right) < 0, \\ &\text{für die } \textit{Konvergenz}: \quad \underline{\lim_{\nu\to\infty}} \left(C_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1}\right) > 0. \end{aligned}\right.$$

Die in Ungl. (10)—(12) enthaltenen Kriterien sollen als Kriterien *zweiter Art* bezeichnet werden.[1])

Bezüglich der Stellung dieser Kriterien *zweiter* zu denjenigen *erster* Art sei hier folgendes bemerkt. Aus der Art ihrer Ableitung, bzw. aus den unter (10) zusammengestellten Ungleichungen erkennt man ohne weiteres, daß jedesmal, wenn ein mit einem gewissen $D_\nu$ bzw. $C_\nu$ zu bildendes Kriterium *zweiter* Art eine Entscheidung liefert, das gleiche auch von dem *entsprechenden* (d. h. mit dem nämlichen $D_\nu$ bzw. $C_\nu$ gebildeten) Kriterium *erster* Art gilt. Das Umgekehrte findet dagegen *keineswegs* statt, d. h. die Kriterien *zweiter* Art können in unendlich vielen Fällen *versagen*, wo die entsprechenden *erster* Art eine Entscheidung liefern.

Denn ist etwa:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \left(D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1}\right) = 0, \quad \text{bzw.} \quad \underline{\lim_{\nu\to\infty}} \left(C_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1}\right) = 0,$$

in welchem Falle also diese Kriterien *versagen*, so kann immerhin für $\nu \geqq n$ durchweg eine Beziehung von der Form bestehen:

$$D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1} \leqq 0, \quad \text{bzw.} \quad C_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1} \geqq 0,$$

---

1) Man kann diesen Kriterien, wie häufig geschieht, auch die (durch Multiplikation mit $\frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}}$ aus (11) resultierende) Form geben:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \left(D_\nu - D_{\nu+1} \frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}}\right) < \,.. \quad \textit{Divergenz},$$

$$\underline{\lim_{\nu\to\infty}} \left(C_\nu - C_{\nu+1} \frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}}\right) > 0: \quad \textit{Konvergenz}.$$

anders geschrieben:

$$\frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}} \geqq \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}} \leqq \frac{C_\nu}{C_{\nu+1}},$$

woraus dann (s. Ungl. (10)) allemal folgen würde

$$\varliminf_{\nu\to\infty} D_\nu \cdot a_{\nu+p} \geqq k, \quad \text{bzw.} \quad \varlimsup_{\nu\to\infty} C_\nu \cdot a_{\nu+p} \leqq \frac{1}{k},$$

d. h. das mit dem betreffenden $D_\nu$ bzw. $C_\nu$ gebildete Kriterium *erster* Art von der Form (4) liefert in diesem Falle eine *Entscheidung*, während das entsprechende Kriterium *zweiter* Art von der Form (12) *versagt.*[1])

Angenommen ferner, man habe für irgendein vorgelegtes $a_\nu$ bei passender Wahl von $D_\nu$:

$$\varlimsup_{\nu\to\infty}\left(D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1}\right) < 0, \tag{12a}$$

sodaß also durch dieses Kriterium die *Divergenz* der Reihe $\sum a_\nu$ angezeigt wird. Aus Ungl. (13) folgt alsdann, daß schon für alle $\nu$ von einem bestimmten Index $\nu = m$ ab eine Beziehung von der Form bestehen muß:

$$D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1} \leqq -\varrho, \quad \text{wo:} \quad \varrho > 0,$$

und somit:

$$D_{\nu+1} \cdot a_{\nu+p+1} - D_\nu \cdot a_{\nu+p} \geqq \varrho \cdot a_{\nu+p+1} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq m. \tag{13}$$

Setzt man hier der Reihe nach $\nu = m, (m+1), \cdots, (n-1)$, (wo $n > m$), so folgt durch Addition der entstehenden Ungleichungen:

$$D_n \cdot a_{n+p} - D_m \cdot a_{m+p} \geqq \varrho \cdot \sum_m^{n-1}{}_\nu\, a_{\nu+p+1} = \varrho \cdot \sum_{m+p+1}^{n+p}{}_\nu\, a_\nu, \tag{14}$$

und hieraus für $\lim n = \infty$, wegen der Divergenz von $\sum a_\nu$:

$$\lim_{n\to\infty} D_n \cdot a_{n+p} = \infty. \tag{15}$$

D. h.

*Allemal, wenn das Divergenzkriterium zweiter Art* (12) *eine Entscheidung liefert, so kommt bei dem Divergenzkriterium erster Art* (4) *der Grenzwert* $\infty$ *zum Vorschein.*

Daraus folgt dann weiter, daß das Divergenzkriterium *zweiter* Art von der Form (12) in *jedem anderen* Falle *versagen* muß, insbesondere

1) Das *Versagen* der Kriterien (12) rührt also in diesem Falle nur von der Benützung der *Limites* her, während die entsprechenden Kriterien in der ursprünglichen Form (11) im gleichen Falle eine Entscheidung liefern.

also auch dann, wenn $\lim_{n\to\infty} D_n \cdot a_{n+p}$ oder auch nur $\underline{\lim}_{n\to\infty} D_n \cdot a_{n+p}$ zwar *von Null verschieden*, aber *endlich* ausfällt und somit das Divergenzkriterium *erster* Art (4) eine unzweideutige *Entscheidung* liefert.[1])

(Beispiel: Da die Reihe $\sum \frac{1}{\nu}$ bereits als *divergent* erkannt wurde, so kann man setzen: $D_\nu = \nu$. Ist dann etwa: $a_{\nu+p} = \frac{\nu - 1}{\nu \cdot (\nu + 1)}$, so wird:

$$\lim_{\nu\to\infty} \nu \cdot a_{\nu+p} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu - 1}{\nu + 1} = 1,$$

woraus die *Divergenz* der Reihe $\sum a_\nu$ unzweideutig hervorgeht. Andererseits hat man: $\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} = \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{\nu^2}$ und daher:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - (\nu+1)\right) = \lim_{\nu\to\infty}\left(\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)(\nu+2) - (\nu+1)\right) = 0,$$

sodaß also dieses Kriterium von der Form (12) *versagt.*)

4. Schließlich ist aber noch ganz besonders hervorzuheben, daß der oben bewiesene, zur Bildung der Kriterien *zweiter* Art dienende Hilfssatz *keineswegs umkehrbar* ist: die Zahlen $a_{\nu+p}$ können offenbar durchweg *über* bzw. *unter* den Zahlen $d_\nu$ bzw. $c_\nu$ liegen, *ohne* daß zwischen den *Quotienten* (Zu- oder Abnahmeverhältnissen) $\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}$ einerseits und $\frac{d_\nu}{d_{\nu+1}}$ bzw. $\frac{c_\nu}{c_{\nu+1}}$ andererseits *irgendwelche feste Beziehung* besteht.[2])

Der Grund, warum man nichtsdestoweniger neben den Kriterien *erster* Art solche *zweiter* Art in die Betrachtung einführt, liegt, wie schon oben angedeutet, lediglich darin, daß sie gerade bei vielen in der Funktionenlehre auftretenden Reihen ein *bequemer* zu ermittelndes Resultat geben, nämlich allemal dann, wenn der Quotient $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ sich in erheblich einfacherer Form darstellt, als $a_\nu$ selbst (z. B. wenn: $a_\nu = p_0 \cdot p_1 \cdots p_\nu$, $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = \frac{1}{p_{\nu+1}}$).

Die oben entwickelten Beziehungen stellen zunächst den *einfachsten* Typus von Kriterien erster und zweiter Art vor: man kann denselben durch geeignete Umformungen auch noch mancherlei andere Formen geben, wie später noch des näheren gezeigt werden soll.

---

1) Bei dem *Konvergenz*kriterium (12) liegt die Sache etwas anders: s. § 54, Nr. 2 am Ende (S. 380).

2) Vgl. im übrigen § 56, Nr. 1 (S. 390).

Im übrigen ist durch die Aufstellung der Kriterien *erster* und *zweiter* Art die Möglichkeit derartiger Bildungen keineswegs erschöpft. Man könnte offenbar auch andere Verbindungen von zwei oder mehr Gliedern der Reihe $\sum a_\nu$ mit den entsprechenden der $d_\nu$ bzw. $c_\nu$ vergleichen und, bei passender Wahl dieser Verbindungen, Schlüsse auf die Divergenz bzw. Konvergenz von $\sum a_\nu$ ziehen. Hiermit wäre für die Herstellung derartiger Kriterien ein völlig unbegrenztes Feld eröffnet: allein gerade wegen dieser Unbegrenztheit wollen wir hier darauf verzichten, noch einzelne Spezialbildungen ausdrücklich durchzuführen.

Um nun brauchbare Kriterien *erster* und *zweiter* Art wirklich aufzustellen, kommt es nach dem bisher gesagten lediglich darauf an, die nötigen $d_\nu$ und $c_\nu$ zur Verfügung zu haben. Wir wenden uns daher jetzt zunächst zur Lösung der Aufgabe: *Alle möglichen $d_\nu$ und $c_\nu$, d. h. typische Formen für das allgemeine Glied jeder divergenten bzw. konvergenten Reihe aufzufinden.*

## § 48. Divergente Reihen: $\sum d_\nu$. — Typische Formen der $d_\nu$.

1. Eine *divergente* Reihe $\sum d_\nu$ soll um so *schwächer divergent* heißen, je *langsamer* $\sum_0^n d_\nu$ mit $n$ ins Unendliche wächst.

Um diese Aussage genauer zu präzisieren, werde gesetzt:

$$\sum_0^n d_\nu = s_n, \quad \sum_0^n d_\nu' = s_n';$$

dann nennen wir die Reihe $\sum_0^\infty d_\nu'$ *schwächer divergent* als die Reihe $\sum_0^\infty d_\nu$, wenn:

$$(1) \qquad s_n' \prec s_n, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n'}{s_n} = 0.$$

Dabei kann man offenbar, wenn $p$, $q$ zwei beliebig gewählte natürliche Zahlen bedeuten, dieser Bedingung auch die etwas allgemeinere Form geben:

$$(1\text{a}) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n' - s_p'}{s_n - s_q} = 0$$

$$\left(\text{da:} \quad \frac{s_n' - s_p'}{s_n - s_q} = \frac{s_n'}{s_n} \cdot \frac{1 - \dfrac{s_p'}{s_n'}}{1 - \dfrac{s_q}{s_n}} \quad \text{und:} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{s_p'}{s_n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_q}{s_n} = 0\right).$$

Ist dagegen:

$$(2) \qquad s'_n \sim s_n$$

(d. h. bleibt: $\frac{s'_n}{s_n}$ zwischen zwei bestimmten positiven Zahlen, oder, anders ausgesprochen, sind $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{s'_n}{s_n}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{s'_n}{s_n}$ beide *endlich* und *von Null verschieden*), so sagen wir, die betreffenden zwei Reihen *divergieren gleichartig*.

Da $s_n$, $s'_n$ mit $n$ *monoton* ins Unendliche wachsen, so lassen sich auf $\overline{\lim} \frac{s'_n}{s_n}$ die Sätze von § 37, Nr. 2, 3 anwenden. Beachtet man, daß $s_n - s_{n-1} = d_n$, $s'_n - s'_{n-1} = d'_n$, so nimmt insbesondere die Relation (7) des eben zitierten Paragraphen (S. 228) die folgende Form an:

$$(3) \qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{d'_n}{d_n} \leqq \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{s'_n}{s_n} \leqq \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{s'_n}{s_n} \leqq \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{d'_n}{d_n}.$$

Daraus folgt aber, daß die Beziehung:

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{d'_n}{d_n} = 0 \quad \text{(anders geschrieben: } d'_n \prec d_n,\ D'_n \succ D_n)$$

eine *hinreichende*[1]) Bedingung für die Existenz der Beziehung (1), d. h. für die *schwächere* Divergenz von $\sum d'_\nu$ bildet; und daß die Beziehung:

$$(5) \qquad d'_n \sim d_n \quad \text{(anders geschrieben: } D'_n \sim D_n)$$

eine *hinreichende* Bedingung für die *gleichartige* Divergenz von $\sum d'_\nu$, $\sum d_\nu$ darstellt.[2])

Im übrigen bemerke man, daß die *Divergenz* zweier Reihen *keineswegs* allemal in dem hier näher definierten Sinne *vergleichbar* sein muß. Mit anderen Worten: durch die Annahme:

$$s'_n \prec s_n, \quad s'_n \sim s_n, \quad s_n \succ s_n$$

sind *keineswegs* alle Möglichkeiten erschöpft. Es könnte auch sein: $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{s'_n}{s_n} = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{s'_n}{s_n} > 0$, oder: $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{s'_n}{s_n} = \infty$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{s'_n}{s_n} < \infty$, in welchen Fällen dann eben die *Divergenz* von $\sum d'_\nu$ und $\sum d_\nu$ *überhaupt nicht vergleichbar* ist.

---

1) Dieselbe ist aber, wie aus der Beziehung (3) des näheren hervorgeht, keine *notwendige*. Das letztere würde nur von der Beziehung gelten:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{d'_n}{d_n} = 0.$$

2) Ist geradezu:

$$d'_n \cong d_n \quad \text{(also: } D'_n \cong D_n),$$

so folgt auch:

$$s'_n \cong s_n.$$

2. *Alle möglichen* $d_\nu$ sind offenbar dadurch *vollständig charakterisiert*, daß $d_\nu$ *positiv* und die Summe von $(\nu+1)$ Gliedern: $(d_0 + d_1 + \cdots + d_\nu)$ eine *wesentlich positive, mit* $\nu$ *monoton ins Unendliche wachsende* Zahl ist. *Bezeichnen wir in diesem Kapitel eine Zahl dieser letzteren Art ein für allemal mit* $M_\nu$ (sodaß also: $M_\nu > M_{\nu-1} > 0$ für $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} M_\nu = +\infty$), so kann man setzen (für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$):

$$(6)\qquad \sum_0^\nu{}_\varkappa\, d_\varkappa = M_\nu \quad \text{(also speziell: } d_0 = M_0\text{)},$$

und daher (für $\nu = 1, 2, 3, \cdots$):

$$\sum_0^{\nu-1}{}_\varkappa\, d_\varkappa = M_{\nu-1},$$

sodaß (für $\nu = 1, 2, 3, \cdots$) sich ergibt:

$$(7)\qquad d_\nu = M_\nu - M_{\nu-1},$$

d. h. das allgemeine Glied $d_\nu$ *jeder divergenten* Reihe läßt sich auf die Form (7) bringen.

*Umgekehrt* erkennt man aber auch ohne weiteres, daß jede Zahl von der Form $(M_\nu - M_{\nu-1})$ das allgemeine Glied einer *divergenten* Reihe liefert. Denn man hat:

$$(8)\qquad M_0 + \sum_1^n{}_\nu\,(M_\nu - M_{\nu-1}) = M_n,$$

und daher:

$$(9)\qquad M_0 + \sum_1^\infty{}_\nu\,(M_\nu - M_{\nu-1}) = \lim_{n\to\infty} M_n = +\infty.$$

Zugleich ergibt sich aus der Definition von Nr. 1, daß diese Reihe um so *schwächer* divergiert, je *langsamer* $M_n$ mit $n$ ins Unendliche wächst. Man kann somit als Resultat dieser Betrachtung den folgenden Satz aussprechen:

> *Das allgemeine Glied* $d_\nu$ *jeder divergenten Reihe läßt sich auf die Form:*
>
> $$(7)\qquad d_\nu = M_\nu - M_{\nu-1}$$
>
> *bringen; umgekehrt ist die Reihe mit dem allgemeinen Gliede* $(M_\nu - M_{\nu-1})$ *stets divergent, und zwar um so schwächer, je langsamer* $M_\nu$ *mit* $\nu$ *ins Unendliche wächst.*

3. Die Gleichungen (1) und (9) lehren, daß man zu einer Reihe mit dem allgemeinen Gliede $d_\nu = M_\nu - M_{\nu-1}$ eine *schwächer* divergierende

konstruieren kann, wenn man an Stelle der Zahlenfolge $(M_\nu)$ eine andere $(M_\nu')$ von der Beschaffenheit substituiert, daß $M_\nu' \prec M_\nu$. Nimmt man speziell: $M_\nu' = \lg M_\nu$, so folgt also zunächst, daß die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $(\lg M_\nu - \lg M_{\nu-1})$ gleichfalls *divergiert* und zwar *schwächer*, als $\sum(M_\nu - M_{\nu-1})$. Nun ist aber nach § 38, S. 245, Ungl. (26):

$$\lg M_\nu - \lg M_{\nu-1} \begin{cases} < \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}} \\ > \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu}, \end{cases} \tag{10}$$

und hieraus folgt zunächst, daß auch die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$\delta_\nu = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}} = \frac{d_\nu}{M_{\nu-1}} \tag{11a}$$

stets *divergent* ist, während man zugleich ohne weiteres erkennt, daß sie *schwächer* divergiert, als diejenige mit dem allgemeinen Gliede $d_\nu$.

Was sodann die Reihe mit dem (in der zweiten Ungl. (10) auftretenden) allgemeinen Gliede:

$$\bar{\delta}_\nu = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu} = \frac{d_\nu}{M_\nu} \tag{11b}$$

betrifft, so läßt sich deren *Divergenz* zwar nicht aus Ungl. (10), jedoch in folgender Weise erkennen. Ist zunächst $M_\nu$ so beschaffen, daß $M_{\nu-1} \sim M_\nu$, so wird auch $\bar{\delta}_\nu \sim \delta_\nu$, sodaß aus der eben bewiesenen Divergenz von $\sum \delta_\nu$ auch die gleichartige Divergenz von $\sum \bar{\delta}_\nu$ folgt. Ist dagegen $M_{\nu-1} \prec M_\nu$, also: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{M_{\nu-1}}{M_\nu} = 0$ oder wenigstens: $\underline{\lim}\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{M_{\nu-1}}{M_\nu} = 0$ (NB. jede andere Möglichkeit ist ausgeschlossen, da ja für jedes endliche $\nu$: $M_{\nu-1} < M_\nu$), so enthält die Reihe mit dem allgemeinen Gliede: $\bar{\delta}_\nu = 1 - \dfrac{M_{\nu-1}}{M_\nu}$ *unbegrenzt* viele Glieder, die *beliebig wenig* unter der Einheit liegen, ist also wiederum *divergent*.

Mit Rücksicht auf Gl. (6) kann man dieses letzte Resultat offenbar auch folgendermaßen aussprechen:

*Mit der Reihe* $\sum d_\nu$ *divergiert auch stets die Reihe* $\sum \dfrac{d_\nu}{s_\nu}$, *wo:* $s_\nu = \sum\limits_0^\nu d_\varkappa$.

Da aber die zweite dieser Reihen wegen $s_\nu \to \infty$ stets *schwächer* divergiert, als die erste, so erkennt man, daß es *keine* Reihe *schwächster* Divergenz geben kann, und daß dieser Satz ein Mittel an die Hand gibt, um aus irgendeiner divergenten Reihe $\sum d_\nu$ eine *unbegrenzte Skala* von immer *schwächer* divergierenden Reihen abzuleiten.

Man kann indessen dieses Ziel bequemer erreichen, wenn man in dem Ausdrucke $d_\nu = M_\nu - M_{\nu-1}$, wie oben $\lg M_\nu$, sukzessive $\lg_2 M_\nu$, $\lg_3 M_\nu$, $\cdots$ an Stelle von $M_\nu$ substituiert. Hierbei ergibt sich (für $k = 0, 1, 2, \cdots$):

$$\lg_{k+1} M_\nu - \lg_{k+1} M_{\nu-1}$$

(wobei man nur für $\nu$ einen Anfangswert $n$ jedesmal groß genug annehmen muß, daß $\lg_{k+1} M_{n-1} \geqq 0$ ausfällt) als allgemeines Glied einer *divergenten* Reihe. Und da nach § 38, S. 246, Ungl. (28a):

$$\lg_{k+1} M_\nu - \lg_{k+1} M_{\nu-1} < \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_k(M_{\nu-1})},$$

so folgt, daß die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$(12) \qquad \delta_\nu^{(k)} = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_k(M_{\nu-1})} \quad \left(\text{wobei speziell: } \delta_\nu^{(0)} = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_0(M_{\nu-1})} = \delta_\nu\right)$$

$$= \frac{d_\nu}{L_k(M_{\nu-1})}$$

$$= \frac{d_\nu}{L_k(d_1 + d_2 + \cdots + d_{\nu-1})}$$

gleichfalls *divergiert*, und zwar erkennt man mit Benützung von (4), daß die Reihen $\sum_n^\infty \delta_\nu^{(k)}$ für $k = 0, 1, 2, \cdots$ eine *unbegrenzte Skala von sukzessive schwächer divergierenden Reihen* bilden.

Unterwirft man die $M_\nu$ noch der Bedingung: $M_{\nu-1} \sim M_\nu$, also auch $L_k(M_{\nu-1}) \sim L_k(M_\nu)$ (vgl. S. 246, 247, Formel (29) und (31)), so gilt das gleiche, wie von den $\delta_\nu^{(k)}$, offenbar auch von den Ausdrücken:

$$(13) \qquad \overline{\delta_\nu^{(k)}} = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_k(M_\nu)} = \frac{d_\nu}{L_k(M_\nu)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Wählt man in (12) speziell: $M_\nu = \nu + 1$ oder in (13) $M_\nu = \nu$, so wird:

$$(14) \qquad \delta_\nu^{(k)} = \overline{\delta_\nu^{(k)}} = \frac{1}{L_k(\nu)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

sodaß also die Reihen mit dem allgemeinen Gliede:

$$\frac{1}{\nu}, \quad \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}, \quad \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu \lg_2 \nu}, \quad \cdots\cdots$$

eine Skala von beständig schwächer divergierenden Reihen bilden.

4. Der im vorigen Artikel als das allgemeine Glied einer *divergenten* Reihe erkannte Ausdruck: $\frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}}$ bildet nun, geradeso wie $M_{\nu+1} - M_\nu$, eine *typische Form*, in welche sich das allgemeine Glied *jeder divergenten* Reihe setzen läßt; und das analoge gilt mit einer unerheblichen Einschränkung auch für $\frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu}$.

Denkt man sich nämlich $\delta_\nu$ als Glied einer divergenten Reihe beliebig vorgelegt, so ist das Produkt:

$$(1+\delta_0)(1+\delta_1)\cdots(1+\delta_\nu) > 1 + \sum_{k=0}^{\nu} \delta_k,$$

und wird daher für $\nu \longrightarrow \infty$ *unendlich groß*; da es aber außerdem, wegen: $1 + \delta_\nu > 1$, mit $\nu$ *monoton* zunimmt, so kann man setzen

$$(1+\delta_0)(1+\delta_1)\cdots(1+\delta_\nu) = M_\nu,$$

und daher:

$$(1+\delta_0)(1+\delta_1)\cdots(1+o_{\nu-1}) = M_{\nu-1},$$

woraus durch Division sich ergibt:

$$1 + \delta_\nu = \frac{M_\nu}{M_{\nu-1}},$$

also schließlich:

$$\delta_\nu = \frac{M_\nu}{M_{\nu-1}} - 1 = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}}. \tag{15}$$

Dieses Resultat läßt sich noch in gewisser Beziehung verallgemeinern. Versteht man unter $\lambda$ eine *ganz beliebige positive* Zahl, so divergiert mit der Reihe $\sum \delta_\nu$ auch stets die Reihe $\sum \frac{\delta_\nu}{\lambda}$. Auf Grund des eben gewonnenen Resultates kann man daher setzen:

$$\frac{\delta_\nu}{\lambda} = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}},$$

also:

$$\delta_\nu = \lambda \cdot \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}}, \tag{16}$$

d. h.:

> *Das allgemeine Glied jeder divergenten Reihe läßt sich stets auf die Form* (16) *bringen, wo $\lambda$ eine beliebig anzunehmende positive Zahl bedeutet.*

Bezeichnet ferner $\bar{\delta}_\nu$ das allgemeine Glied einer *divergenten* Reihe,

deren Glieder für jeden Wert $\nu$ kleiner als 1 sind (während $\lim\limits_{\nu\to\infty} \bar{\delta}_\nu$ bzw. $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, \bar{\delta}_\nu$ eventuell auch den Wert 1 haben darf), so ist offenbar auch $\sum \frac{\bar{\delta}_\nu}{1-\bar{\delta}_\nu}$ eine *divergente* Reihe (wegen: $0 < 1 - \bar{\delta}_\nu < 1$, also: $\frac{1}{1-\bar{\delta}_\nu} > 1$). Infolgedessen kann man nach Gl. (15) setzen:

$$\frac{\bar{\delta}_\nu}{1-\bar{\delta}_\nu} = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}},$$

also:

$$\frac{1}{\bar{\delta}_\nu} = 1 + \frac{M_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} = \frac{M_\nu}{M_\nu - M_{\nu-1}},$$

und man findet daher:

$$\bar{\delta}_\nu = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu} \tag{17}$$

als weitere *typische* Form für das allgemeine Glied *jeder* divergenten Reihe, deren Glieder für jeden endlichen Index unter 1 liegen.

Bedeutet dann schließlich $\delta_\nu'$ das allgemeine Glied einer divergenten Reihe mit der einzigen Einschränkung, daß $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, \delta_\nu' < \infty$, so existieren allemal positive Zahlen $\lambda$ von der Beschaffenheit, daß durchweg: $\delta_\nu' < \lambda$, also $\frac{\delta_\nu'}{\lambda} < 1$. Alsdann ergibt sich aber durch Anwendung von Gl. (17) auf $\frac{\delta_\nu'}{\lambda}$:

$$\delta_\nu' = \lambda \cdot \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu} \tag{18}$$

als *typische* Darstellungsform aller möglichen $\delta_\nu'$, für die nicht gerade $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, \delta_\nu' = \infty$ ist.

## § 49. Konvergente Reihen: $\sum c_\nu$. — Typische Formen der $c_\nu$.

1. Eine *konvergente* Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu\, c_\nu = s$ soll um so *schwächer konvergent* heißen, je *langsamer* $s_n = \sum\limits_0^n{}_\nu\, c_\nu$ mit unbegrenzt wachsendem $n$ der Grenze $s$ zustrebt, d. h. je *langsamer* die Differenz:

$$s - s_n = \sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu\, c_\nu \quad \text{(also der „\textit{Rest}" } R_n \text{ s. § 44, S. 295, Gl. (7))}$$

mit unbegrenzt wachsendem $n$ gegen *Null* konvergiert.

Setzt man etwa: $\sum_0^\infty c_\nu' = s'$, $\sum_0^n c_\nu' = s_n'$, so wird hiernach diese Reihe *schwächer* konvergent heißen, als die Reihe $\sum_0^\infty c_\nu$, wenn:

$$(1) \qquad s' - s_n' \succ s - s_n, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{s' - s_n'}{s - s_n} = \infty.$$

Und die beiden Reihen *konvergieren gleichartig*, wenn:

$$(2) \qquad s' - s_n' \sim s - s_n \quad \text{d. h.} \quad 0 < g \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{s' - s_n'}{s - s_n} \leqq G < \infty.$$

Da $s_n$, $s_n'$ *monoton zunehmen*, also $s - s_n$, $s' - s_n'$ *monoton* (gegen Null) *abnehmen*, so gelten für $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{s' - s_n'}{s - s_n}$ die Sätze des § 37, Nr. 2, 3 (S. 226 bis 229) unter dem Texte. Beachtet man, daß: $s - s_{n-1} - (s - s_n) = s_n - s_{n-1} = c_n$ usw., so nimmt insbesondere die a. a. O. mit (7a) bezeichnete Relation die folgende Form an:

$$(3) \qquad \underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{c_n'}{c_n} \leqq \underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{s' - s_n'}{s - s_n} \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{s' - s_n'}{s - s_n} \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{c_n'}{c_n}.$$

Daraus folgt aber, daß die Beziehung:

$$(4) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{c_n'}{c_n} = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad 0 < \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{c_n'}{c_n} < \infty$$

$$\text{(also: } c_n' \succ c_n,\ C_n' \prec C_n) \qquad \text{(also: } c_n' \sim c_n,\ C_n' \sim C_n)$$

eine *hinreichende* Bedingung dafür bildet, daß $\sum c_\nu'$ *schwächer* als $\sum c_\nu$, bzw. *gleichartig* mit $\sum c_\nu$ *konvergiert.*[1])

1) Dieser besondere Fall der Sätze des § 37 kann auch leicht für sich bewiesen werden, sodaß es also nicht unbedingt notwendig erscheint, auf jene allgemeineren Sätze zu rekurrieren. Ist z. B. $c_n' \sim c_n$, so hat man, etwa für $\nu > n$:

$$g \leqq \frac{c_\nu'}{c_\nu} \leqq G$$

$$g \cdot c_\nu \leqq c_\nu' \leqq G \cdot c_\nu$$

$$g(s_{n+\varrho} - s_n) \leqq s_{n+\varrho}' - s_n' \leqq G(s_{n+\varrho} - s_n),$$

also:

$$g \leqq \frac{s_{n+\varrho}' - s_n'}{s_{n+\varrho} - s_n} \leqq G.$$

Hieraus für $\varrho \to \infty$:

$$g \leqq \frac{s' - s_n'}{s - s_n} \leqq G,$$

und schließlich:

$$g \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{s' - s_n'}{s - s_n} \leqq G.$$

Analog im Falle: $c_n' \succ c_n$.

2. Die Glieder $c_\nu$ einer beliebig vorgelegten konvergenten Reihe mit der Summe $s$ sind dadurch vollständig charakterisiert, daß $s - s_\nu$ (wo: $s_\nu = c_0 + c_1 + \cdots + c_\nu$) mit unbegrenzt wachsendem $\nu$ *monoton* gegen Null abnimmt. Infolgedessen kann man setzen (für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$):

$$s - s_\nu = \frac{1}{M_\nu}, \tag{5}$$

also (für $\nu = 1, 2, 3, \cdots$):

$$s - s_{\nu-1} = \frac{1}{M_{\nu-1}}.$$

Subtrahiert man die erste dieser Gleichungen von der zweiten, so folgt (mit Berücksichtigung der Beziehung: $s_\nu = s_{\nu-1} + c_\nu$):

$$c_\nu = \frac{1}{M_{\nu-1}} - \frac{1}{M_\nu} = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu \cdot M_{\nu-1}}. \tag{6}$$

*Umgekehrt* ist die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\left(\frac{1}{M_{\nu-1}} - \frac{1}{M_\nu}\right)$ stets *konvergent.* Denn man hat:

$$\sum_1^n{}_\nu \left(\frac{1}{M_{\nu-1}} - \frac{1}{M_\nu}\right) = \frac{1}{M_0} - \frac{1}{M_n}, \tag{7}$$

und daher:

$$\sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{M_{\nu-1}} - \frac{1}{M_\nu}\right) = \frac{1}{M_0}. \tag{8}$$

Zugleich lehrt Gl. (7), daß die fragliche Reihe auf Grund der in Nr. 1 dieses Paragraphen gegebenen Definition um so *schwächer* konvergiert, je *langsamer* mit unbegrenzt wachsendem $n$: $\frac{1}{M_n}$ der *Null* zustrebt, also $M_n$ ins *Unendliche* wächst. Somit ergibt sich der folgende Satz:

*Das allgemeine Glied $c_\nu$ jeder konvergenten Reihe läßt sich auf die Form:*

$$c_\nu = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu \cdot M_{\nu-1}} \tag{9}$$

*bringen; umgekehrt ist die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu \cdot M_{\nu-1}}$ stets konvergent, und zwar um so schwächer, je langsamer $M_\nu$ mit $\nu$ ins Unendliche wächst.*

3. Um also aus irgendeiner *konvergenten* Reihe $\sum \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu \cdot M_{\nu-1}}$ unbegrenzt viele *schwächer* konvergierende abzuleiten, wird man wiederum

nur an Stelle von $M_\nu$ solche $M_\nu'$ zu substituieren haben, welche mit $\nu$ langsamer ins Unendliche wachsen, als $M_\nu$. Wir setzen nun zunächst:

(10) $$c_\nu' = \frac{M_\nu^\varrho - M_{\nu-1}^\varrho}{M_\nu^\varrho \cdot M_{\nu-1}^\varrho} = \frac{1 - q_\nu^\varrho}{M_{\nu-1}^\varrho}, \quad \text{wo:} \quad q_\nu = \frac{M_{\nu-1}}{M_\nu},$$

so wird offenbar für $\varrho > 0$ die Reihe $\sum c_\nu'$ stets konvergieren. Um die Abnahme ihrer Glieder mit derjenigen der $c_\nu$ zu vergleichen, findet man $\left(\text{wegen } c_\nu = \frac{1-q_\nu}{M_{\nu-1}}\right)$:

(11) $$\frac{c_\nu'}{c_\nu} = \frac{1 - q_\nu^\varrho}{1 - q_\nu} \cdot M_{\nu-1}^{1-\varrho}.$$

Für jedes endliche $\nu$ hat der Faktor $\frac{1-q_\nu^\varrho}{1-q_\nu}$ wegen $q_\nu < 1$ einen bestimmten positiven Wert. Ist sodann auch $\lim\limits_{\nu\to\infty} q_\nu < 1$ (bzw. $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, q_\nu < 1$), so besitzt jener Faktor für $\nu \to \infty$ gleichfalls einen bestimmten positiven Grenzwert (bzw. zwei bestimmte *positive* Hauptlimites). Und ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} q_\nu = 1$, so hat man nach § 37, S. 236, Gl. (37):

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1-q_\nu^\varrho}{1-q_\nu} = \varrho$$

(bzw. falls $\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, q_\nu = \alpha < 1$, $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, q_\nu = 1$ sein sollte, so ergeben sich für $\frac{1-q_\nu^\varrho}{1-q_\nu}$ die wesentlich *positiven* Hauptlimites: $\frac{1-\alpha^\varrho}{1-\alpha}$ und $\varrho$). Man findet somit in *jedem* Falle aus Gl. (11):

$$\frac{c_\nu'}{c_\nu} \sim M_{\nu-1}^{1-\varrho},$$

oder anders geschrieben:

(12) $$c_\nu' \sim \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu \cdot M_{\nu-1}^\varrho},$$

und man kann daher wegen der Konvergenz von $\sum c_\nu'$ den folgenden Satz aussprechen:

*Es konvergiert stets die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:*

(13) $$c_\nu' = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu \cdot M_{\nu-1}^\varrho} = M_\nu^{1-\varrho} \cdot c_\nu$$

*für $\varrho > 0$, und zwar offenbar schwächer, als $\sum c_\nu$, falls $\varrho < 1$.*

4. Aus dem eben gefundenen Resultat folgt (wegen $M_\nu > M_{\nu-1}$) ohne weiteres, daß auch die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$(14)\qquad \gamma_\nu = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu^{1+\varrho}} \quad (\varrho > 0)$$

stets *konvergieren* muß. Das gleiche gilt dann auch von der Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$\frac{\lg_k M_\nu - \lg_k M_{\nu-1}}{(\lg_k M_\nu)^{1+\varrho}} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots),$$

welches für $k = 0$ mit $\gamma_\nu$ identisch ist. Da aber nach § 38, S. 246, Ungl. (28):

$$\lg_k M_\nu - \lg_k M_{\nu-1} > \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_{k-1}(M_\nu)} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots),$$

so folgt, daß für $\varrho > 0$ auch der Ausdruck:

$$(15)\qquad \gamma_\nu^{(k)} = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_k(M_\nu)\cdot(\lg_k M_\nu)^\varrho} = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_k^{(\varrho)}(M_\nu)} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots),$$

welcher wiederum für $k = 0$ mit $\gamma_\nu$ identisch wird, das allgemeine Glied einer *konvergenten* Reihe darstellt. Und zwar bilden die Reihen $\sum \gamma_\nu^{(k)}$, wegen:

$$L_k^{(\varrho)}(M_\nu) > L_{k+1}^{(\varrho)}(M_\nu) \quad \text{(s. § 38, S. 244, Formel (23))},$$

eine *unbegrenzte Skala von sukzessive schwächer konvergierenden Reihen.*

Unterwirft man die $M_\nu$ wiederum noch der Bedingung $M_{\nu-1} \sim M_\nu$ (sodaß also nach § 38, Gl. (31), S. 247: $\lg_k M_{\nu-1} \cong \lg_k M_\nu$ für $k \geqq 1$), so gilt das gleiche, wie von den Ausdrücken $\gamma_\nu^{(k)}$, offenbar auch von den folgenden:

$$(16)\qquad \bar{\gamma}_\nu^{(k)} = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_k^{(\varrho)}(M_{\nu-1})} \quad (\varrho > 0,\ k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Und wenn man speziell in (15): $M_\nu = \nu$, oder in (16): $M_\nu = \nu + 1$ setzt, so wird:

$$(17)\qquad \gamma_\nu^{(k)} = \bar{\gamma}_\nu^{(k)} = \frac{1}{L_k^{(\varrho)}(\nu)} \quad (\varrho > 0,\ k = 0, 1, 2, \cdots),$$

d. h. die Reihen:

$$\sum \frac{1}{\nu^{1+\varrho}},\ \sum \frac{1}{\nu\cdot(\lg\nu)^{1+\varrho}},\ \cdots,\ \sum \frac{1}{\nu\cdot\lg\nu\cdots\lg_{k-1}\nu\,(\lg_k\nu)^{1+\varrho}},\ \cdots$$

sind durchweg *konvergent*, und zwar bilden sie eine Skala von beständig *schwächer* konvergierenden Reihen.

## § 50. Die Kriterien erster Art.

1. Da das allgemeine Glied *jeder divergenten* bzw. *konvergenten* Reihe in der Form:

$$d_\nu = \frac{1}{D_\nu} = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}} \quad (\text{§ 48, S. 327, Gl. (11a)}),$$

$$c_\nu = \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu \cdot M_{\nu-1}} = \frac{1}{M_\nu \cdot D_\nu} \quad (\text{§ 49, S. 332, Gl. (6)})$$

enthalten ist, so müssen sich *alle überhaupt existierenden Kriterien erster Art* in die Form setzen lassen:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \underline{\lim}_{\nu\to\infty} \dfrac{M_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} = \underline{\lim}_{\nu\to\infty} D_\nu \cdot a_{\nu+p} > 0: & \textit{Divergenz,} \\ \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \dfrac{M_\nu \cdot M_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} = \overline{\lim}_{\nu\to\infty} M_\nu \cdot D_\nu \cdot a_{\nu+p} < \infty: & \textit{Konvergenz} \end{cases}$$

(wobei es offenbar noch freisteht, die linke Seite mit einem *ganz beliebigen*, nur für jedes $\nu$ oberhalb und unterhalb gewisser positiver Zahlen bleibenden Faktor zu multiplizieren, also den links stehenden Ausdruck durch einen *infinitär ähnlichen* zu ersetzen).

Da aber die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu \cdot M_{\nu-1}^\varrho}$ für jeden positiven, insbesondere also schon *für jeden beliebig kleinen positiven Wert* von $\varrho$ (nach S. 333, Gl. (13)) *konvergiert*, so erscheint es für die *Konvergenz* von $\sum a_\nu$ *schon hinreichend*, wenn für *irgendein* (beliebig kleines) $\varrho > 0$:

$$\text{(A')} \qquad \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{M_\nu \cdot M_{\nu-1}^\varrho}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} < \infty$$

wird — eine Bedingung, welche für jedes $\varrho < 1$ offenbar *weniger* verlangt, als die entsprechende unter (A), und die somit eine *Verbesserung* des betreffenden Konvergenzkriteriums darstellt.

Berücksichtigt man ferner, daß auch: $\dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu}$ das allgemeine Glied einer *divergenten*, $\dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu^{1+\varrho}}$ dasjenige einer *konvergenten* Reihe bildet, so kann man auch statt des Divergenzkriteriums (A) und des Konvergenzkriteriums (A') das folgende *Paar von korrespondierenden Kriterien* aufstellen:

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} \underline{\lim}_{\nu\to\infty} \dfrac{M_\nu}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} = \underline{\lim}_{\nu\to\infty} D_\nu' \cdot a_{\nu+p} > 0: & \textit{Divergenz,} \\ \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \dfrac{M_\nu^{1+\varrho}}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} = \overline{\lim}_{\nu\to\infty} M_\nu^\varrho \cdot D_\nu' \cdot a_{\nu+p} < \infty: & \textit{Konvergenz.} \end{cases}$$

Um hieraus eine Skala *von immer wirksameren* Kriterien abzuleiten, hat man nur für $M_\nu$ sukzessive *langsamer* ins Unendliche wachsende Zahlen $M_\nu'$ einzusetzen. Dabei erscheint es offenbar zweckmäßig, die zur Bildung des *Anfangskriteriums* dieser Skala zu verwendenden $M_\nu$ in bezug auf die Schnelligkeit ihrer Zunahme für wachsende Werte von $\nu$ von vornherein einer passenden Beschränkung zu unterwerfen. Wir führen also die schon früher mehrfach benützte Bedingung ein:

$$(1) \qquad M_\nu \sim M_{\nu-1},$$

welche die Zunahme von $M_\nu$ in der Weise einschränkt, daß $\dfrac{M_\nu}{M_{\nu-1}}$ stets *unter einer endlichen Grenze* bleibt.

Substituiert man sodann in (B) $\lg_k M_\nu$ für $M_\nu$ (wo $k=0, 1, 2, \cdots$) und beachtet, daß infolge der Bedingung (1) nach § 38, S. 247, Formel (32):

$$\lg_k M_\nu - \lg_k M_{\nu-1} \sim \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_{k-1}(M_\nu)},$$

so liefern die Kriterien (B) die folgende *Skala* von *Kriterienpaaren*:

$$(\mathrm{C}) \quad \begin{cases} \varliminf\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{L_k(M_\nu)}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} > 0: & \textit{Divergenz}, \\ \varlimsup\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{L_k(M_\nu)\cdot(\lg_k M_\nu)^\varrho}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} < \infty: & \textit{Konvergenz} \quad (\varrho > 0), \end{cases}$$

deren Anfangskriterien ($k=0$) mit den unter (B) aufgestellten identisch sind. Wählt man speziell $M_\nu = \nu$, so gehen diese Kriterien in die folgenden über:

$$(\mathrm{C}') \quad \left.\begin{cases} \varliminf\limits_{\nu\to\infty} L_k(\nu)\cdot a_{\nu+p} > 0: & \textit{Divergenz} \\ \varlimsup\limits_{\nu\to\infty} L_k(\nu)\cdot(\lg_k \nu)^\varrho \cdot a_{\nu+p} < \infty: & \textit{Konvergenz} \quad (\varrho > 0) \end{cases}\right\} k = 0, 1, 2, \cdots.$$

d. h. die Reihe $\sum a_\nu$ *divergiert*, wenn einer der Ausdrücke:

$$\nu\cdot a_{\nu+p}, \quad \nu\cdot\lg\nu\cdot a_{\nu+p}, \quad \nu\cdot\lg\nu\cdot\lg_2\nu\cdot a_{\nu+p}, \quad \cdots\cdots$$

stets *oberhalb* einer angebbaren positiven Zahl bleibt — anders ausgedrückt, für $\nu \to \infty$ einen von Null verschiedenen Limes bzw. *unteren* Limes hat. Sie *konvergiert*, wenn für irgendeinen Wert $\varrho > 0$ einer der Ausdrücke:

$$\nu^{1+\varrho}\cdot a_{\nu+p}, \quad \nu\cdot(\lg\nu)^{1+\varrho}\cdot a_{\nu+p}, \quad \nu\cdot\lg\nu\cdot(\lg_2\nu)^{1+\varrho}\cdot a_{\nu+p}, \quad \cdots\cdots$$

stets *unter* einer endlichen Grenze bleibt — anders ausgedrückt, für $\nu \to \infty$ einen nicht unendlichen Limes bzw. *oberen* Limes besitzt. Das Anfangskriterium dieser Skala rührt von Cauchy her, die übrigen wurden ungefähr gleichzeitig von A. de Morgan und Ossian Bonnet aufgestellt, finden sich aber auch schon in einer nachgelassenen Note Abels.

2. Statt der bisher aufgestellten Kriterien*paare* kann man auch sogenannte *disjunktive* Kriterien *erster* Art bilden, d. h. solche, bei denen die Prüfung eines *einzigen* Ausdruckes gleichzeitig zur Feststellung der Divergenz oder Konvergenz dient, sofern das betreffende Kriterium überhaupt eine Entscheidung liefert. Als Ausgangspunkt diene hierbei die folgende Bemerkung. Ist $\alpha$ eine beliebige positive Zahl $> 1$ (also: $\lg \alpha > 0$), so erkennt man leicht die *Konvergenz* der Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$(2) \qquad \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{\alpha^{M_\nu}}.$$

Denn man hat (nach § 38, S. 239, Ungl. (1)): $\alpha^{M_\nu} = e^{\lg \alpha \cdot M_\nu} > M_\nu^{\,q}$ (für jedes positive $q$), also:

$$\frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{\alpha^{M_\nu}} < \frac{M_\nu - M_{\nu+1}}{M_\nu^{\,1+\varrho}} \quad (\varrho > 0).$$

Zugleich sieht man ohne weiteres, daß die Reihe mit dem allgemeinen Gliede (2) für $\alpha = 1$ und *a fortiori* für $\alpha < 1$ *divergiert*.

Infolgedessen ergibt sich für eine beliebige Reihe $\sum a_\nu$:

*Divergenz*, wenn für $\nu \geqq n$ und ein positives $\alpha \leqq 1$: $a_{\nu+p} \geqq \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{\alpha^{M_\nu}}$,

*Konvergenz*, wenn für $\nu \geqq n$ und irgendein $\alpha > 1$: $a_{\nu+p} \leqq \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{\alpha^{M_\nu}}$,

oder anders geschrieben:

$$(3) \begin{cases} \textit{Divergenz}, \text{ wenn für } \alpha \leqq 1 \\ \textit{Konvergenz}, \text{ wenn für } \alpha > 1 \end{cases} \sqrt[M_\nu]{\frac{a_{\nu+p}}{M_\nu - M_{\nu-1}}} \begin{cases} \geqq \dfrac{1}{\alpha}, \text{ d.h. schließlich: } \geqq 1, \\ \leqq \dfrac{1}{\alpha}, \end{cases}$$

und, wenn man wiederum nur die betreffenden Grenzwerte für $\nu \to \infty$ in Betracht zieht:

$$(\mathrm{D}) \qquad \overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} \sqrt[M_\nu]{\frac{a_{\nu+p}}{M_\nu - M_{\nu-1}}} \begin{cases} > 1: & \textit{Divergenz}, \\ < 1: & \textit{Konvergenz}.^{1)} \end{cases}$$

---

1) Dabei genügt zur *Divergenz* die Existenz der fraglichen Beziehung für den *unteren*, zur *Konvergenz* für den *oberen* Limes. Das Divergenzkriterium erleidet beim Übergange von (3) zu (D) insofern eine gewisse Minderung der Tragweite, als die in (3) noch zulässige Annahme $\alpha = 1$ bei Benützung der Limesform in Wegfall kommt (vgl. die analoge Erscheinung § 47, S. 321, Formel (11), (12) und S. 322, Fußn. 1). Im übrigen bemerke man noch, daß die *Divergenz*bedingung (D) offenbar nur erfüllt sein kann, wenn:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{a_{\nu+p}}{M_\nu - M_{\nu-1}} = +\infty,$$

während doch infolge der Divergenz von $\sum(M_\nu - M_{\nu-1})$ die *Divergenz* von $\sum a_\nu$

Aus dieser *Fundamentalform des disjunktiven Kriteriums erster Art* kann man wiederum Skalen von schärferen Kriterien ableiten, indem man von einem irgendwie fixierten $M_\nu$ ausgehend an Stelle von $M_\nu$ sukzessive immer *langsamer* ins Unendliche wachsende Zahlen $M_\nu'$ einführt. Hierbei erscheint es für die praktische Anwendung zweckmäßiger, die Ungleichungen (3) bzw. das Kriterium (D) in der Weise umzuformen, daß man auf beiden Seiten der betreffenden Ungleichungen die Logarithmen der reziproken Werte bildet. Es folgt auf diese Weise aus Ungl. (3):

$$(4)\left\{\begin{array}{l} \textit{Divergenz}, \text{ wenn für } \alpha \leqq 1 \\ \textit{Konvergenz}, \text{ wenn für } \alpha > 1 \end{array}\right\} \frac{\lg \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}}}{M_\nu} \left\{\begin{array}{l} \leqq \lg \alpha, \text{ d. h. schließlich: } \leqq 0 \\ \geqq \lg \alpha > 0, \end{array}\right.$$

sodaß das Kriterium (D) in das folgende (in Wahrheit nur durch die Schreibweise verschiedene) übergeht:

$$(\mathrm{E}) \qquad \varliminf_{\nu \to \infty} \frac{\lg \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}}}{M_\nu} \left\{\begin{array}{ll} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Konvergenz}. \end{array}\right.$$

Die $M_\nu$ hatten bisher keiner besonderen Beschränkung zu genügen. Führt man jetzt wiederum die Bedingung $M_\nu \sim M_{\nu-1}$ ein und substituiert $\lg_{k+1} M_\nu$ (wo $k = 0, 1, 2, \cdots$) für $M_\nu$, so kann man die auf diese Weise aus (E) resultierenden Kriterien, wegen:

$$\lg_{k+1} M_\nu - \lg_{k+1} M_{\nu-1} \sim \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_k(M_\nu)},$$

durch die folgenden ersetzen:

$$(\mathrm{F}) \qquad \varliminf_{\nu \to \infty} \frac{\lg \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_k(M_\nu) \cdot a_{\nu+p}}}{\lg_{k+1} M_\nu} \left\{\begin{array}{ll} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Konvergenz}. \end{array}\right. \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

---

schon gesichert ist, wenn nur:

$$\varliminf_{\nu \to \infty} \frac{a_{\nu+p}}{M_\nu - M_{\nu-1}} > 0,$$

daß aber auch dieses letztere Divergenzkriterium noch eine *merkliche Verschlechterung* des *ursprünglichen* Divergenzkriteriums (B) vorstellt. Hiernach erweist sich das *Divergenz*kriterium (D), soweit seine praktische Brauchbarkeit in Frage kommt, als wertlos. Nichtsdestoweniger besitzt es eine *außerordentliche prinzipielle* Bedeutung, die auf der (übrigens in gewisser Weise noch vervollkommnungsfähigen) *Einheitlichkeit* des zur Prüfung von Divergenz und Konvergenz dienlichen Ausdruckes beruht: näheres hierüber (für die besondere Wahl $M_\nu = \nu$) s. in Nr. 4 dieses Paragraphen.

Das für $k = 0$ resultierende Kriterium, nämlich:

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \frac{\lg \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu \cdot a_{\nu+p}}}{\lg M_\nu} \begin{cases} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Konvergenz}, \end{cases}$$

kann wegen: $\lg \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu \cdot a_{\nu+p}} = \lg \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}} - \lg M_\nu$, auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$(\mathrm{F}_1) \qquad \varliminf_{\nu\to\infty} \frac{\lg \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}}}{\lg M_\nu} \begin{cases} < 1: & \textit{Divergenz}, \\ > 1: & \textit{Konvergenz}; \end{cases}$$

während die übrigen Kriterien der Skala (F) ($k = 1, 2, 3, \cdots$) wegen:

$$\lg \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_k(M_\nu) \cdot a_{\nu+p}} = \lg \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_{k-1}(M_\nu) \cdot a_{\nu+p}} - \lg_{k+1} M_\nu$$

sich in die Form setzen lassen:

$$(\mathrm{F}_2) \quad \varliminf_{\nu\to\infty} \frac{\lg \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_{k-1}(M_\nu) \cdot a_{\nu+p}}}{\lg_{k+1} M_\nu} \begin{cases} < 1: & \textit{Divergenz}, \\ > 1: & \textit{Konvergenz}. \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots).$$

3. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß das *Divergenz*kriterium ($\mathrm{F}_1$) eine etwas *geringere*, dagegen das *Konvergenz*kriterium *genau dieselbe* Tragweite besitzt, wie das entsprechende (d. h. mit demselben $M_\nu$ gebildete) in (B). Liefert nämlich das *Divergenz*kriterium ($\mathrm{F}_1$) eine unzweideutige Entscheidung, d. h. hat man:

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \frac{\lg \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}}}{\lg M_\nu} < 1,$$

so muß schon von einem bestimmten Index ab, etwa für $\nu \geqq n$ eine Beziehung von der Form bestehen:

$$\frac{\lg \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}}}{\lg M_\nu} \leqq 1 - \varrho, \quad \text{wo} \quad \varrho > 0.$$

Daraus folgt dann weiter, daß für $\nu \geqq n$:

$$\lg \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}} \leqq \lg M_\nu^{1-\varrho},$$

$$\frac{a_{\nu+p}}{M_\nu - M_{\nu-1}} \geqq \frac{1}{M_\nu^{1-\varrho}}, \quad \frac{M_\nu}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} \geqq M_\nu^{\varrho},$$

also schließlich:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{M_\nu}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} = \infty,$$

d. h. das *Divergenz*kriterium $(F_1)$ kann nur dann eine Entscheidung liefern, wenn bei dem entsprechenden in (B) geradezu der Grenzwert $\infty$ erscheint. Es *versagt* also schon, wenn nur $\underline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{M_\nu}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p}$ *endlich* und *von Null verschieden* ausfällt[1]), in welchem Falle das *Divergenz*kriterium (B) noch *wirksam* bleibt.

---

1) Dies kann auch durch analoge Schlüsse, wie die eben angestellten, leicht direkt bestätigt werden. Ist nämlich:

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{M_\nu}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} = g > 0,$$

so hat man zwar für *alle* $\nu \geqq n$:

$$\frac{M_\nu}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} > g - \varepsilon,$$

dagegen für *unendlich viele* $m_\nu$:

$$\frac{M_{m_\nu}}{M_{m_\nu} - M_{m_\nu - 1}} \cdot a_{m_\nu+p} < g + \varepsilon.$$

Aus der *ersten* dieser Ungleichungen folgt dann für *alle* $\nu \geqq n$:

$$\frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}} < \frac{M_\nu}{g-\varepsilon},$$

$$\frac{\lg \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}}}{\lg M_\nu} < 1 - \frac{\lg (g-\varepsilon)}{\lg M_\nu},$$

und analog aus der *zweiten* für *unendlich viele* $m_\nu$:

$$\frac{\lg \dfrac{M_{m_\nu} - M_{m_\nu-1}}{a_{m_\nu+p}}}{\lg M_{m_\nu}} > 1 - \frac{\lg (g+\varepsilon)}{\lg M_{m_\nu}}.$$

Daraus ergibt sich aber, daß:

$$\overline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{\lg \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}}}{\lg M_\nu} = 1,$$

d. h. das *Divergenz*kriterium $(F_1)$ *versagt* in diesem Falle.

Gibt andererseits das *Konvergenz*kriterium ($F_1$) eine Entscheidung, d. h. hat man:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\lg \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}}}{\lg M_\nu} > 1$$

und daher auch schon für $\nu \geqq n$:

$$\frac{\lg \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}}}{\lg M_\nu} \geqq 1 + \varrho, \quad \text{wo } \varrho > 0,$$

so folgt in ähnlicher Weise, wie oben:

$$\frac{a_{\nu+p}}{M_\nu - M_{\nu-1}} \leqq \frac{1}{M_\nu^{1+\varrho}}, \quad \frac{M_\nu^{1+\varrho}}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} \leqq 1 \quad (\nu \geqq n),$$

also auch:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{M_\nu^{1+\varrho}}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} \leqq 1,$$

d. h. das *Konvergenz*kriterium (B) liefert dann gleichfalls eine Entscheidung. *Umgekehrt:* Ist das *letztere* der Fall, d. h. weiß man nur, daß:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{M_\nu^{1+\varrho}}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} = G < \infty,$$

so hat man für $\nu \geqq n$ durchweg:

$$\frac{M_\nu^{1+\varrho}}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot a_{\nu+p} < G + \varepsilon,$$

also:

$$\frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}} > \frac{M_\nu^{1+\varrho}}{G+\varepsilon}, \quad \lg \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}} > (1+\varrho) \lg M_\nu - \lg (G+\varepsilon),$$

und somit schließlich:

$$\underline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{\lg \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{a_{\nu+p}}}{\lg M_\nu} \geqq 1 + \varrho > 1,$$

d. h. das *Konvergenz*kriterium ($F_1$) ist ebenfalls entscheidend.

4. Setzt man wiederum in (D), ($F_1$), ($F_2$) $M_\nu = \nu$, so ergeben sich die folgenden spezielleren Kriterien:

(D')
$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{a_{\nu+p}} \begin{cases} > 1: & \textit{Divergenz}, \\ < 1: & \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

($F_1'$)
$$\underline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{\lg \dfrac{1}{a_{\nu+p}}}{\lg \nu} \begin{cases} < 1: & \textit{Divergenz}, \\ > 1: & \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{F}_2') \qquad \varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{\lg \dfrac{1}{L_{k-1}(\nu)\cdot a_{\nu+p}}}{\lg_{k+1}\nu} \begin{cases} <1: & \textit{Divergenz}, \\ >1: & \textit{Konvergenz}. \end{cases} \quad (k=1,2,3,\cdots).$$

Die beiden ersten dieser Kriterien rühren von Cauchy, die übrigen von Bertrand her. Sie bilden zusammengenommen eine Skala von immer wirksameren Kriterien, wie aus ihrer Herleitung hervorgeht und auch unmittelbar erkannt wird, wenn man das Kriterium (D′) auf die Form (E), die Kriterien ($\mathrm{F}_1'$), ($\mathrm{F}_2'$) auf die Form (F) bringt, sodaß sich ergibt:

$$(\mathrm{E}') \qquad \varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{\lg \dfrac{1}{a_{\nu+p}}}{\nu} \begin{cases} <0: & \textit{Divergenz}, \\ >0: & \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{F}') \qquad \varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{\lg \dfrac{1}{L_k(\nu)\cdot a_{\nu+p}}}{\lg_{k+1}\nu} \begin{cases} <0: & \textit{Divergenz}, \\ >0: & \textit{Konvergenz}. \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots).$$

Bezüglich des Kriteriums (D′) — des sog. *Cauchyschen Fundamentalkriteriums erster Art* — sei hier noch die folgende (für die Theorie der *Potenzreihen* besonders wichtige) Bemerkung gemacht. Man kann danach zunächst auf die *Divergenz* von $\sum a_\nu$ schließen, wenn:

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{a_{\nu+p}} = A > 1,$$

oder:

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{a_{\nu+p}} = A > 1$$

(weil ja im letzteren Falle umsomehr: $\varlimsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{a_{\nu+p}} > 1$ wird). Es erweist sich nun aber für die *Divergenz* von $\sum a_\nu$ schon als ausreichend, wenn nur:

$$(5\,\mathrm{a}) \qquad \varlimsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{a_{\nu+p}} = A > 1$$

ist.[1] Denn in diesem Falle gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ *unbegrenzt viele* Glieder $a_{m_\nu}$, derart, daß:

$$\sqrt[m_\nu]{a_{m_\nu+p}} > A - \varepsilon, \quad \text{also:} \quad a_{m_\nu+p} > (A-\varepsilon)^{m_\nu}.$$

Und da man hierbei $\varepsilon$ so klein annehmen kann, daß auch noch:

$$A - \varepsilon > 1,$$

so wachsen die Glieder $a_{m_\nu+p}$ mit $m_\nu$ über jede Grenze, sodaß also

1) Wobei also $\varliminf\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{a_{\nu+p}}$ auch $< 1$ sein darf.

$\sum a_\nu$ *divergieren* muß.[1]) Selbstverständlich genügt es andererseits für die *Konvergenz* von $\sum a_\nu$, wenn:

$$\text{(5b)} \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{a_{\nu+p}} < 1,$$

sodaß also schließlich überhaupt nur der *obere* Limes von $\sqrt[\nu]{a_{\nu+p}}$ in Betracht kommt und ein *Versagen* des fraglichen Kriteriums nur dann eintritt, wenn:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{a_{\nu+p}} = 1.$$

5. Das in (D) bzw. (E) enthaltene *Konvergenz*kriterium gestattet noch eine gewisse, theoretisch interessante Verallgemeinerung. Setzt man in (D):

$$M_\nu - M_{\nu-1} = D_\nu^{-1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots) \quad M_0 = D_0^{-1},$$

also:

$$M_\nu = M_0 + \sum_1^\nu {}_k (M_\nu - M_{\nu-1}) = \sum_0^\nu {}_k D_k^{-1} = s_\nu,$$

so nimmt das *Konvergenz*kriterium (D) die Form an:

$$\text{(6)} \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} (D_\nu \cdot a_{\nu+p})^{\frac{1}{s_\nu}} < 1: \quad \textit{Konvergenz.}$$

Dabei kann $D_\nu^{-1}$ — da die $M_\nu$ bei der Aufstellung der Formel (D) keiner besonderen Beschränkung unterworfen waren — nach dem Satze von § 48, Nr. 2 (S. 326, Gl. (7)) das allgemeine Glied *jeder beliebigen divergenten* Reihe bedeuten.

Sei nun ferner $C_\nu^{-1}$ das allgemeine Glied einer *beliebigen konvergenten* Reihe, so ist es für die *Konvergenz* von $\sum a_\nu$ gleichfalls hinreichend, wenn von irgendeiner bestimmten Stelle $\nu$ ab:

$$C_\nu \cdot a_{\nu+p} < 1$$

und diese Bedingung kann, da $s_\nu = \sum_0^\nu {}_k C_k^{-1}$ eine für jedes $\nu$ — hier

---

1) Der Grund dieses Verhaltens liegt offenbar darin, daß hier die zur Kriteriumbildung herangezogene *Vergleichsreihe* aus lauter Gliedern besteht, welche schließlich *ins Unendliche* wachsen, und daß daher *jede* aus ihr *herausgehobene* Reihe gleichfalls *divergiert*, was im allgemeinen *nicht* der Fall zu sein braucht, wenn die Glieder der divergenten Reihe schließlich gegen Null konvergieren oder auch nur den unteren Limes Null haben (s. § 46, Nr. 1, S. 311).

übrigens einschließlich $\nu \to \infty$ — *endliche* und *von Null verschiedene* positive Zahl bedeutet, ohne weiteres durch die folgende ersetzt werden:

$$(C_\nu \cdot a_{\nu+p})^{\frac{1}{s_\nu}} < 1,$$

aus welcher dann schließlich als hinreichende Bedingung sich ergibt:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\,(C_\nu \cdot a_{\nu+p})^{\frac{1}{s_\nu}} < 1: \quad \textit{Konvergenz.} \tag{7}$$

Bezeichnet man nun mit $(B_\nu)$ *eine ganz beliebige unbegrenzte Folge positiver Zahlen*, so muß $\sum B_\nu^{-1}$ entweder *divergieren* oder *konvergieren*, d. h. die $B_\nu$ gehören entweder der Klasse der Zahlen $D_\nu$ oder derjenigen der $C_\nu$ an. Infolgedessen kann man aber die in (6) und (7) enthaltenen, völlig *gleichartig* gestalteten Konvergenzbedingungen folgendermaßen zusammenfassen:

*Die Reihe $\sum a_\nu$ ist konvergent, wenn eine positive Zahlenfolge $(B_\nu)$ existiert, sodaß:*

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\,(B_\nu \cdot a_{\nu+p})^{\frac{1}{s_\nu}} < 1, \quad \textit{wo:}\ s_\nu = \sum_0^\nu {}_k B_k^{-1}. \tag{G}$$

Es ist dies ein Konvergenzkriterium *erster* Art, welches durch die schwerlich zu überbietende *Allgemeinheit* seiner Form merkwürdig erscheint und in dieser Hinsicht das vollkommene Analogon zu dem später zu erwähnenden (§ 54, Ungl. (J), S. 379) Kummerschen Kriterium (*zweiter* Art) bildet. Man kann ihm durch Übergang zu den Logarithmen der beiden Ungleichungsseiten (nach Analogie des Konvergenzkriteriums (E)) auch die Form geben:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\,\frac{-\lg(B_\nu \cdot a_{\nu+p})}{s_\nu} < 0: \quad \textit{Konvergenz.} \tag{H}$$

## § 51. Beispiele für die Anwendung der Kriterien erster Art. — Divergenzmaß der Reihen: $\sum \frac{1}{L_k(\nu)}$, $\sum \frac{1}{\nu^{1-\varrho}}$. — Legendres Annäherungsformel für die Häufigkeit der Primzahlen.

1. Es sei:

$$a_\nu = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu^{\nu+1}}} = \frac{1}{\nu^{1+\frac{1}{\nu}}} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots). \tag{1}$$

Man bemerkt zunächst, daß die Glieder dieser Reihe durchweg *unter* den

entsprechenden der harmonischen Reihe (§ 44, Nr. 4, S 299), dagegen von einer bestimmten Stelle ab stets *über* denjenigen der Reihe $\sum \frac{1}{\nu^{1+\varrho}}$ liegen, wie *klein* auch die positive Zahl $\varrho$ angenommen werden mag.

Im übrigen ergibt sich:

(2) $$\lim_{\nu \to \infty} \nu \cdot a_\nu = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{\nu^{\frac{1}{\nu}}} = \lim_{\nu \to \infty} e^{-\frac{\lg \nu}{\nu}} = 1,$$

sodaß also die betreffende Reihe auf Grund des ersten Divergenzkriteriums der Skala (C′), § 50 (S. 336), *divergiert.*[1])

2. Setzt man:

(3) $$a_\nu = \frac{1}{(\lg \nu)^{\lg \nu}} \quad (\nu = 2, 3, \cdots),$$

so hat man:

(4) $$(\lg \nu)^{\lg \nu} = (e^{\lg_2 \nu})^{\cdot \lg \nu} = (e^{\lg \nu})^{\cdot \lg_2 \nu} = \nu^{\lg_2 \nu},$$

also:

(5) $$\lim_{\nu = \infty} \nu^{1+\varrho} \cdot a_\nu = \lim_{\nu = \infty} \frac{1}{\nu^{\lg_2 \nu - (1+\varrho)}} = 0,$$

d. h. die Reihe $\sum a_\nu$ ist auf Grund des ersten Konvergenzkriteriums der Skala (C′) *konvergent.* Das gleiche gilt allgemein, wenn gesetzt wird:

(6) $$a_\nu = \frac{1}{(\lg_k \nu)^{\lg \nu}} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots),$$

wegen:

(7) $$(\lg_k \nu)^{\lg \nu} = (e^{\lg_{k+1} \nu})^{\lg \nu} = \nu^{\lg_{k+1} \nu}.$$

Dagegen wäre die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

(8) $$a_\nu = \frac{1}{(\lg \nu)^{\lg_2 \nu}}$$

*divergent.* Denn man hat:

---

1) Wie aus Nr. 3 des vorigen Paragraphen hervorgeht, muß das *disjunktive* Kriterium der betreffenden Stufe, also das Kriterium ($F_1'$) hier *versagen.* In der Tat findet man:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\lg \frac{1}{a_\nu}}{\lg \nu} = \lim_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdot \frac{\lg \nu}{\lg \nu} = 1.$$

Man müßte also das nächst höhere Kriterium (d. h. ($F_2'$) für $k = 1$) anwenden und findet alsdann:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\lg \frac{1}{\nu \cdot a_\nu}}{\lg_2 \nu} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\lg \nu}{\nu \lg_2 \nu} = 0: \quad \textit{Divergenz.}$$

$$(9) \qquad a_\nu = e^{-(\lg_2 \nu)^2},$$

$$(10) \qquad \nu \cdot a_\nu = e^{\lg \nu - (\lg_2 \nu)^2} = e^{\lg \nu \left(1 - \frac{(\lg_2 \nu)^2}{\lg \nu}\right)},$$

folglich mit Benützung von § 38, Gl. (2), S. 240:

$$(11) \qquad \lim_{\nu = \infty} \nu \cdot a_\nu = \infty.$$

Hieraus folgt noch *a fortiori*, daß auch jede Reihe von der Form $\sum \frac{1}{(\lg_k \nu)^{\lg_{\lambda+1} \nu}}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots; \lambda = 1, 2, 3, \cdots)$ *divergiert.*

3. Die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$(12) \qquad a_\nu = \left(\frac{\lg_k(\nu+1)}{\lg_k(\nu)} - 1\right)^{1+\sigma} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist *konvergent* für $\sigma > 0$, *divergent* für $\sigma \leq 0$.

Man hat nämlich nach § 38, Nr. 5 (S. 247, Gl. (36a)):

$$(13) \qquad \lim_{\nu \to \infty} L_k(\nu) \left\{\frac{\lg_k(\nu+1)}{\lg_k(\nu)} - 1\right\} = 1,$$

und wenn man diese Gleichung in die $(1+\sigma)^{\text{te}}$ Potenz erhebt:

$$(14) \qquad \lim_{\nu \to \infty} L_k(\nu)^{1+\sigma} \cdot a_\nu = 1,$$

woraus wieder mit Benützung des Kriteriums $(C')$ die Richtigkeit der obigen Behauptung hervorgeht.

Das analoge gilt für die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$(15) \qquad a_\nu = \left(1 - \frac{\lg_k(\nu)}{\lg_k(\nu+1)}\right)^{1+\sigma}$$

(s. S. 247, Gl. (36b)).

4. Wir fanden früher, daß die Reihe $\sum_1^\infty \left\{\frac{1}{\nu} - \lg \frac{\nu+1}{\nu}\right\}$ *konvergiert* (ihre Summe war die *Eulersche Konstante* $\gamma$: s. § 34, S. 207, Gl. (8), (9) und § 44, S. 300, Gl. (19)). In gleicher Weise *konvergiert* nun auch die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$(16) \qquad a_\nu = \left(\frac{1}{L_k(\nu)} - \lg \frac{\lg_k(\nu+1)}{\lg_k(\nu)}\right) \quad (k = 1, 2, 3, \cdots),$$

welche offenbar für $k = 0$ in die eben erwähnte übergeht, falls man wiederum den Symbolen $\lg_0 \nu$, $L_0(\nu)$ die Bedeutung von $\nu$ beilegt.

Aus § 38, S. 246, Ungl. (28) folgt nämlich für $M_\nu = \nu + 1$:

$$(17) \qquad \frac{1}{L_k(\nu)} > \lg_{k+1}(\nu+1) - \lg_{k+1}(\nu) > \frac{1}{L_k(\nu+1)},$$

also:

(18) $$-\frac{1}{L_k(\nu)} < -\lg \frac{\lg_k(\nu+1)}{\lg_k(\nu)} < -\frac{1}{L_k(\nu+1)},$$

und schließlich:

(19) $$0 < \left(\frac{1}{L_k(\nu)} - \lg \frac{\lg_k(\nu+1)}{\lg_k(\nu)}\right) < \left(\frac{1}{L_k(\nu)} - \frac{1}{L_k(\nu+1)}\right),$$

woraus unmittelbar die *Konvergenz* der fraglichen Reihe resultiert, da ja die Reihe $\sum \left(\frac{1}{L_k(\nu)} - \frac{1}{L_k(\nu+1)}\right)$ als solche von der typischen Form $\sum \left(\frac{1}{M_{\nu-1}} - \frac{1}{M_\nu}\right)$ *konvergiert.*

Bezeichnet man etwa mit $m_k$ die *kleinste positive ganze Zahl*, für welche $\lg_k m_k$ positiv ausfällt, so kann man also setzen:

(20) $$\sum_{m_k}^{\infty} {}^{\nu} \left(\frac{1}{L_k(\nu)} - \lg \frac{\lg_k(\nu+1)}{\lg_k(\nu)}\right) = s_k,$$

wo $s_k$ eine *bestimmte positive Zahl* bedeutet, welche für $k = 0$ (also: $m_k = 1$) in die *Eulersche Konstante* übergeht.

Schreibt man Gl. (20) folgendermaßen:

(21) $$\lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{m_k}^{n} {}^{\nu} \frac{1}{L_k(\nu)} - \sum_{m_k}^{n} {}^{\nu} (\lg_{k+1}(\nu+1) - \lg_{k+1}(\nu))\right\} = s_k,$$

so folgt, daß:

(22) $$\lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{m_k}^{n} {}^{\nu} \frac{1}{L_k(\nu)} - \lg_{k+1}(n+1)\right\} = s_k - \lg_{k+1}(m_k),$$

oder — wegen $\lim (\lg_{k+1}(n+1) - \lg_{k+1}(n)) = 0$ — auch:

(23) $$\lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{m_k}^{n} {}^{\nu} \frac{1}{L_k(\nu)} - \lg_{k+1}(n)\right\} = s_k - \lg_{k+1}(m_k) = \gamma_k.$$

Die Reihe: $\sum_{m_k}^{\infty} {}^{\nu} \frac{1}{L_k(\nu)}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ *divergiert* also in *der* Weise, daß die Differenz: $\sum_{m_k}^{n} {}^{\nu} \frac{1}{L_k(\nu)} - \lg_{k+1}(n)$ stets *endlich* bleibt und für $n \to \infty$ einen *bestimmten Grenzwert* $\gamma_k$ besitzt. Es gibt also $\lg_{k+1}(n)$ ein *genaues Maß für die Divergenz* der Reihe: $\sum_{m_k}^{n} {}^{\nu} \frac{1}{L_k(\nu)}$ für $n \to \infty$

in *dem* Sinne, daß nicht nur der *Quotient* dieser beiden Zahlen mit unbegrenzt wachsendem $n$ der Grenze 1 zustrebt (also: $\sum_{m_k}^{n}{}' \frac{1}{L_k(\nu)} \cong \lg_{k+1}(n)$), sondern daß geradezu ihre *Differenz* gegen eine bestimmte Zahl $\gamma_k$ konvergiert.

5. In ähnlicher Weise läßt sich auch das *genaue Divergenzmaß* der Reihe $\sum_{1}^{\infty}{}' \frac{1}{\nu^{1-\varrho}}$ (wo: $0<\varrho<1$) bestimmen. Setzt man nämlich:

$$
\begin{aligned}
(24) \qquad a_\nu &= \frac{1}{\nu^{1-\varrho}} - \frac{1}{\varrho}\{(\nu+1)^\varrho - \nu^\varrho\} \\
&= \nu^\varrho\left\{\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\varrho}\left(\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\varrho - 1\right)\right\},
\end{aligned}
$$

so läßt sich zunächst zeigen, daß $\sum a_\nu$ *konvergiert*. Nach § 31, Nr. 5 (S. 193, Fußn.) hat man:

$$
(25) \qquad \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\varrho \begin{cases} < 1 + \frac{\varrho}{\nu}, \\ > 1 + \frac{\varrho}{\nu+1}, \end{cases}
$$

und daher:

$$
(26) \qquad \frac{1}{\varrho}\left(\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\varrho - 1\right) \begin{cases} < \frac{1}{\nu}, \\ > \frac{1}{\nu+1}, \end{cases}
$$

also schließlich:

$$
(27) \qquad a_\nu \begin{cases} > 0 \\ < \nu^\varrho\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) = \frac{1}{\nu^{1-\varrho}\cdot(\nu+1)} < \frac{1}{\nu^{2-\varrho}}, \end{cases}
$$

woraus in der Tat die *Konvergenz* der Reihe $\sum a_\nu$ resultiert, etwa: $\sum_{1}^{\infty}{}' a_\nu = s^{(\varrho)}$. Man hat nun ferner:

$$
\begin{aligned}
\sum_{1}^{n}{}' a_\nu &= \sum_{1}^{n}{}' \frac{1}{\nu^{1-\varrho}} - \frac{1}{\varrho}\sum_{1}^{n}{}' ((\nu+1)^\varrho - \nu^\varrho) \\
(28) \qquad &= \sum_{1}^{n}{}' \frac{1}{\nu^{1-\varrho}} - \frac{(n+1)^\varrho}{\varrho} + \frac{1}{\varrho},
\end{aligned}
$$

und daher:

$$
(29) \qquad \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{1}^{n}{}' \frac{1}{\nu^{1-\varrho}} - \frac{(n+1)^\varrho}{\varrho}\right\} = s^{(\varrho)} - \frac{1}{\varrho} = \gamma^{(\varrho)}.
$$

Da übrigens:

(30) $$(n+1)^{\varrho} - n^{\varrho} = n^{\varrho}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\varrho} - 1\right)\begin{cases} > 0 \\ < n^{\varrho}\cdot\frac{\varrho}{n} = \frac{\varrho}{n^{1-\varrho}}, \end{cases}$$

so folgt, daß:

(31) $$\lim_{n\to\infty}\left((n+1)^{\varrho} - n^{\varrho}\right) = 0,$$

und man kann somit Gl. (29) auch durch die folgende ersetzen:

(32) $$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_1^n{}_{\nu}\frac{1}{\nu^{1-\varrho}} - \frac{n^{\varrho}}{\varrho}\right\} = \gamma^{(\varrho)},$$

sodaß also $\frac{n^{\varrho}}{\varrho}$ in dem oben angegebenen Sinne ein *genaues Maß für die Divergenz* der Reihe $\sum \frac{1}{\nu^{1-\varrho}}$ abgibt. Setzt man die hier auftretende Differenz in die Form:

(33) $$\sum_1^n{}_{\nu}\frac{1}{\nu^{1-\varrho}} - \frac{n^{\varrho}}{\varrho} = \sum_1^n{}_{\nu}\left\{\frac{1}{\nu^{1-\varrho}} - \frac{1}{\varrho}\left(\nu^{\varrho} - (\nu-1)^{\varrho}\right)\right\},$$

so erkennt man leicht mit Hilfe der oben benützten Ungleichungen (D) und (A) des § 31, daß jedes einzelne Glied der letzten Summe, und somit auch $\gamma^{(\varrho)}$ *negativ* ausfällt, während andererseits Gl. (29) zeigt, daß $\gamma^{(\varrho)} > -\frac{1}{\varrho}$ sein muß.

6. Wie in § 6, Nr. 1 (S. 34) gezeigt wurde, ist die Reihe der *Primzahlen*, d. h. derjenigen ganzen Zahlen $p_{\nu}$, welche nur *durch sich selbst* und *die Einheit* teilbar sind ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7$ usf.), eine *unbegrenzte*.

Die *Anzahl* der Primzahlen $p_{\nu}$, welche irgendeine positive ganze Zahl $n$ *nicht übersteigen*, nimmt also mit $n$ *unbegrenzt*, aber, wie die *direkte Abzählung* der Primzahlen gelehrt hat, in sehr *unregelmäßiger* Weise zu; oder anders ausgesprochen: bezeichnet man mit $P(n)$ die *Anzahl* derjenigen Primzahlen, welche $\leqq n$ sind, so gelangt man auf dem angedeuteten empirischen Wege zu der Vermutung, daß der zwischen $n$ und $P(n)$ bestehende Zusammenhang *äußerst verwickelter Natur* sein muß. Denselben durch eine *exakte*, aber naturgemäß entsprechend *komplizierte Formel* darzustellen, ist im wesentlichen Riemann mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden, insbesondere durch Anwendung der komplexen Integration gelungen, allerdings auf Grund gewisser, lediglich auf Vermutung beruhender Annahmen, deren eine auch heute noch nicht vollständig bewiesen ist. Dagegen hat schon Legendre durch Induktion

eine *sehr einfache Annäherungsformel* gefunden, welche innerhalb verhältnißmäßig weiter, mit der Erfahrung verglichener Zahlengrenzen (von 1000 bis zu 3 Millionen) der Wahrheit sehr nahe kommende Resultate liefert. Dieselbe lautet:

$$P(n) = \frac{n}{\lg n - C} - \Delta(n), \tag{34}$$

wo: $C = 1{,}08366$, und $|\Delta(n)|$ eine im Vergleich zu $n$ und $P(n)$ *verhältnismäßig kleine* Zahl bedeutet, sobald man nur $n$ *einigermaßen groß* (etwa $n \geqq 1000$) annimmt (z.B. $\Delta(1000) = -3$, $\Delta(10\,000) = 0$, $\Delta(100\,000) = 4$, $\Delta(1\,000\,000) = -42$). Setzt man in der obigen Formel $n = p_\nu$, wo wiederum $p_\nu$ die $\nu^{\text{te}}$ Primzahl bedeutet, so wird $P(p_\nu) = \nu$, und daher:

$$\frac{p_\nu}{\lg p_\nu - C} = \nu - \Delta(p_\nu). \tag{35}$$

Daraus läßt sich folgern, daß die Reihe derjenigen Zahlen $q_\nu$, welche durch die folgende Gleichung definiert sind[1]):

$$\frac{q_\nu}{\lg q_\nu - C} = \nu, \tag{36}$$

zum mindesten innerhalb gewisser Grenzen *näherungsweise* mit der

---

1) Der Beweis dafür, daß diese Definition überhaupt einen Sinn hat, daß also zur Folge der natürlichen Zahlen $\nu$, zum mindesten von einem bestimmten $\nu$ ab, eine (übrigens beständig wachsende) unbegrenzte Folge von Zahlen $q_\nu$ gehört, beruht auf der (mit Benützung sehr einfacher, hier jedoch noch nicht zur Verfügung stehender analytischer Hilfsmittel beweisbaren) Tatsache, daß der Ausdruck $\frac{q}{\lg q - C}$ (welcher für $q = e^{C+1}$ ebenfalls den Wert $e^{C+1}$ hat) gleichzeitig mit $q > e^{C+1}$ *monoton* wachsend *jeden*, insbesondere also *jeden ganzzahligen* Wert $\nu > e^{C+1}$ *einmal und nur einmal* annimmt, daß also umgekehrt zu jedem $\nu > e^{C+1}$ *ein und nur ein* $q_\nu > e^{C+1}$ gehört.

Um die Abweichung der Zahlen $q_\nu$ von den $p_\nu$ abzuschätzen, findet man zunächst aus Gl. (35), (36):

$$\frac{q_\nu}{\lg q_\nu - C} - \frac{p_\nu}{\lg p_\nu - C} = \Delta(p_\nu),$$

also:

$$q_\nu(\lg p_\nu - C) - p_\nu(\lg q_\nu - C) = \Delta(p_\nu)\cdot(\lg p_\nu - C)(\lg q_\nu - C),$$

anders geschrieben:

$$(q_\nu - p_\nu)(\lg p_\nu - C) - (\lg q_\nu - \lg p_\nu)[p_\nu + \Delta(p_\nu)\cdot(\lg p_\nu - C)] = \Delta(p_\nu)\cdot(\lg p_\nu - C)^2.$$

Nun ist (s. § 34, Ungl. (3), S. 206):

$$|\lg q_\nu - \lg p_\nu| = \left|\lg\frac{q_\nu}{p_\nu}\right| = \left|\lg\left(1 + \frac{q_\nu - p_\nu}{p_\nu}\right)\right| < \frac{|q_\nu - p_\nu|}{p_\nu},$$

und es ergibt sich somit, wenn man $\nu$ von vornherein groß genug annimmt, daß $\lg(p_\nu - C) > 0$ ausfällt:

Reihe der *Primzahlen* $p_\nu$ übereinstimmen wird. Es bietet darnach einiges Interesse, die Divergenz bzw. Konvergenz von Reihen der Form $\sum \frac{1}{q_\nu}$, $\sum \frac{1}{q_\nu \lg q_\nu}$ usw. zu untersuchen. Dabei können wir noch, ohne die fragliche Untersuchung merklich zu erschweren, an die Stelle der Zahlen $q_\nu$ einen etwas allgemeineren Typus von Zahlen $r_\nu$ setzen, welche einer Gleichung von folgender Form genügen[1]):

$$(37) \qquad \frac{r_\nu}{A_\nu \cdot \lg r_\nu + B_\nu} = \nu .$$

Hier bedeutet $A_\nu$ eine Zahl, welche für jeden Wert von $\nu$ zwischen zwei endlichen *positiven* Zahlen enthalten bleibt; $B_\nu$ eine (positive oder negative) Zahl (inkl. 0), deren Absolutwert mit unbegrenzt wachsenden Werten von $\nu$ auch in gewisser Weise unbegrenzt wachsen darf, höchstens aber in dem Maße, daß: $|B_\nu| \prec \lg r_\nu$ und daher, zum mindesten von einem bestimmten Werte $\nu \geqq n$ ab, stets $A_\nu \cdot \lg r_\nu + B_\nu > 0$ ausfällt. Die Zahlen $r_\nu$ gehen dann in die oben mit $q_\nu$ bezeichneten Zahlen über, wenn speziell: $A_\nu = 1, B_\nu = -C$ gesetzt wird.

7. Bringt man Gl. (37) auf die Form:

$$(38) \qquad \nu = \frac{r_\nu}{\lg r_\nu \left(A_\nu + \frac{B_\nu}{\lg r_\nu}\right)},$$

so folgt zunächst, daß:

$$\lg \nu = \lg r_\nu - \lg_2 r_\nu - \lg \left(A_\nu + \frac{B_\nu}{\lg r_\nu}\right),$$

und daher:

$$(39) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{\lg \nu}{\lg r_\nu} = 1, \quad \text{also: } \lg r_\nu \cong \lg \nu,$$

---

$$|q_\nu - p_\nu| \left((\lg p_\nu - C) - \left|1 + \frac{\Delta(p_\nu)}{p_\nu}(\lg p_\nu - C)\right|\right) < |\Delta(p_\nu)|\,(\lg p_\nu - C)^2,$$

oder auch, da $\frac{\Delta(p_\nu)}{p_\nu}(\lg p_\nu - C)$ für hinlänglich große $p_\nu$ numerisch *verhältnismäßig klein* wird, der Ausdruck: $1 + \frac{\Delta(p_\nu)}{p_\nu}(\lg p_\nu - C)$ dann also jedenfalls *positiv* ausfällt:

$$|q_\nu - p_\nu| \left(\left(1 - \frac{\Delta(p_\nu)}{p_\nu}\right)(\lg p_\nu - C) - 1\right) < |\Delta p_\nu|\,(\lg p_\nu - C)^2,$$

und daher schließlich:

$$\frac{|q_\nu - p_\nu|}{p_\nu} < \frac{|\Delta(p_\nu)|\,(\lg p_\nu - C)^2}{(p_\nu - \Delta(p_\nu))(\lg p_\nu - C) - p_\nu},$$

sodaß also $|q_\nu - p_\nu|$ im Vergleich zu $p_\nu$ *verhältnismäßig klein* wird.

1) Der Beweis für die Existenz der Zahlen $r_\nu$ kann in analoger Weise geführt werden, wie für die $q_\nu$.

somit auch allgemein:

$$(40)\qquad \lg_k r_\nu \cong \lg_k \nu \quad (k=1,2,3,\cdots).$$

Da nun aus Gl. (37) sich ergibt:

$$(41)\qquad \frac{1}{r_\nu} = \frac{1}{A_\nu\cdot\nu}\cdot\frac{1}{\lg r_\nu + \frac{B_\nu}{A_\nu}} = \frac{1}{A_\nu\cdot\nu\cdot\lg\nu}\cdot\frac{\lg\nu}{\lg r_\nu}\cdot\frac{1}{1+\frac{B_\nu}{A_\nu\cdot\lg r_\nu}},$$

so findet man mit Benützung von (39) und (40) die drei Beziehungen:

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r_\nu}\cong\dfrac{1}{A_\nu}\cdot\dfrac{1}{\nu\cdot\lg\nu}, \quad \text{also: } \dfrac{1}{r_\nu^{1+\varrho}}\cong\dfrac{1}{A_\nu^{1+\varrho}}\cdot\dfrac{1}{(\nu\cdot\lg\nu)^{1+\varrho}} \\ \dfrac{1}{r_\nu(\lg r_\nu)^\varrho}\cong\dfrac{1}{A_\nu}\cdot\dfrac{1}{\nu\cdot(\lg\nu)^{1+\varrho}} \\ \dfrac{1}{r_\nu\cdot\lg_2 r_\nu\cdots\lg_k r_\nu\cdot(\lg_k r_\nu)^\varrho}\cong\dfrac{1}{A_\nu}\cdot\dfrac{1}{\nu\cdot\lg\nu\cdot\lg_2\nu\cdots(\lg_k\nu)^{1+\varrho}} \quad (k=2,3,\ldots). \end{cases}$$

Dieselben lehren, daß die Reihen mit dem allgemeinen Gliede:

$$(43)\qquad \frac{1}{r_\nu^{1+\varrho}},\quad \frac{1}{r_\nu(\lg r_\nu)^\varrho},\quad \frac{1}{r_\nu\cdot\lg_2 r_\nu\cdots(\lg_k r_\nu)^{1+\varrho}}$$

für $\varrho \leqq 0$ *divergieren* (s. S. 325, Gl. (5); S. 328, Gl. (14)), dagegen für $\varrho > 0$ *konvergieren* (s. S. 331, Ungl. (4); S. 334, Gl. (17)). Es *divergiert* also insbesondere die Reihe $\sum \frac{1}{r_\nu}$, während schon $\sum \frac{1}{r_\nu\cdot(\lg r_\nu)^\varrho}$ und sogar: $\sum \frac{1}{r_\nu(\lg_2 r_\nu)^{1+\varrho}}$ für jedes positive $\varrho$ *konvergiert.*

Es verdient bemerkt zu werden, daß die *Divergenz* bzw. *Konvergenz* aller dieser Reihen erhalten bleibt, wenn an die Stelle der Zahlen $r_\nu$ die Reihe der *Primzahlen* $p_\nu$ gesetzt wird. Die *Konvergenz* der Reihe $\sum \frac{1}{p_\nu^{1+\varrho}}$ für $\varrho > 0$ ist ohne weiteres evident, ihre *Divergenz* für $\varrho = 0$ und *a fortiori* für $\varrho < 0$ wird sich bei späterer Gelegenheit ergeben.[1]) Den Beweis für die *Divergenz* bzw. *Konvergenz* der übrigen in Betracht kommenden Reihen hat Tchebicheff gegeben: obschon derselbe lediglich auf ganz elementaren Hilfsmitteln beruht, so wollen wir seiner Weitläufigkeit halber nicht näher darauf eingehen und begnügen uns mit dem Hinweise auf die betreffende Abhandlung.[2])

1) S. § 83, Nr. 3.

2) *Mémoire sur les nombres premiers.* Journal de Mathématiques, T. 17, p. 384.

## § 52. Über die Tragweite der Kriterien erster Art. — Unmöglichkeit eines absolut wirksamen Kriteriums. — Reihen, welche wegen besonders schwacher Divergenz oder Konvergenz auf keins der logarithmischen Kriterien reagieren.

1. Ein beliebiges *Kriterienpaar erster Art:*

$$\varliminf_{\nu\to\infty} D_\nu \cdot a_{\nu+p} > 0: \quad \textit{Divergenz},$$

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} C_\nu \cdot a_{\nu+p} < \infty: \quad \textit{Konvergenz},$$

*versagt* nicht nur, wenn geradezu:

$$\text{(I)} \qquad \lim_{\nu\to\infty} D_\nu \cdot a_{\nu+p} = 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} C_\nu \cdot a_{\nu+p} = \infty,$$

sondern auch dann, wenn die fraglichen Grenzwerte *nicht existieren* und gleichzeitig:

$$\text{(II)} \qquad \varliminf_{\nu\to\infty} D_\nu \cdot a_{\nu+p} = 0, \quad \varlimsup_{\nu\to\infty} C_\nu \cdot a_{\nu+p} = \infty.$$

Hieraus geht aber hervor, daß die *Wirksamkeit* jedes solchen Kriteriums *ganz wesentlich* von der *Anordnung* der Glieder $a_\nu$ abhängt (während die *Divergenz* bzw. *Konvergenz* selbst hiervon *unabhängig* ist). Um die Richtigkeit dieser Bemerkung in Evidenz zu setzen, beweise ich den folgenden Satz:

*Bedeuten $(a_\nu)$, $(P_\nu)$, $(Q_\nu)$ unbegrenzte Folgen positiver Zahlen von der Art, daß:*

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} P_\nu = \infty, \quad \lim_{\nu\to\infty} Q_\nu = \infty,$$

*so läßt sich die Gesamtheit der Zahlen $a_\nu$ stets als eine Folge $(b_\nu)$ anordnen, sodaß:*

$$\varliminf_{\nu\to\infty} P_\nu \cdot b_\nu = 0, \quad \varlimsup_{\nu\to\infty} Q_\nu \cdot b_\nu = \infty.$$

Beweis. Man zerlege die Reihe der Zahlen $\nu$ ganz willkürlich in zwei unbegrenzte Folgen $(m_\lambda)$ und $(r_\lambda)$ (wo: $\lambda = 0, 1, 2, \cdots$).[1]) Sodann kann man nach Annahme einer unbegrenzten Folge positiver Zahlen $(\varepsilon_\nu)$ *mit dem Grenzwerte Null* aus der Reihe $(a_\nu)$ eine unbegrenzte Folge von Gliedern $a_0'$, $a_1'$, $a_2'$, $\cdots$ in der Weise herausheben, daß:

$$\text{(1)} \qquad a_0' \leqq \frac{\varepsilon_0}{P_{m_0}}, \quad a_1' \leqq \frac{\varepsilon_1}{P_{m_1}}, \quad \cdots, \quad a_\lambda' \leqq \frac{\varepsilon_\lambda}{P_{m_\lambda}}, \quad \cdots$$

(da ja: $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$) und daß noch eine gleichfalls unbegrenzte Folge

---

1) Man nehme z. B. für $m_\lambda$ alle *geraden* Zahlen (inkl. 0), für $r_\lambda$ alle *ungeraden* Zahlen, also:

$$m_\lambda = 2\lambda, \quad r_\lambda = 2\lambda + 1.$$

übrig bleibt. Diese übrig bleibenden $a_\nu$ zerlege man willkürlich in zwei unbegrenzte Folgen $(a_\lambda'')$, $(a_\lambda''')$ $(\lambda = 0, 1, 2, \cdots)$ und hebe sodann aus der Reihe der Zahlen $Q_{r_\lambda}$ eine unbegrenzte Folge: $Q_{n_0}, Q_{n_1}, Q_{n_2}, \cdots$ heraus, sodaß:

$$(2) \qquad Q_{n_0} \geqq \frac{1}{\varepsilon_0 a_0''}, \quad Q_{n_1} \geqq \frac{1}{\varepsilon_1 a_1''}, \quad \cdots, \quad Q_{n_\lambda} \geqq \frac{1}{\varepsilon_\lambda a_\lambda''}, \quad \cdots$$

(was stets möglich ist, wegen: $\lim\limits_{\nu \to \infty} Q_\nu = \infty$). Die nach Aushebung der Zahlen $n_\lambda$ aus der Folge $(r_\lambda)$ übrig bleibende unbegrenzte Folge werde mit $(p_\lambda)$ bezeichnet. (NB. Daß wirklich auch stets eine *unbegrenzte* Folge $(p_\lambda)$ zum Vorschein kommt, kann man offenbar durch passende Auswahl der $Q_{n_\lambda}$ unter allen Umständen erzielen.)

Setzt man jetzt:

$$(3) \qquad b_{m_\lambda} = a_\lambda', \quad b_{n_\lambda} = a_\lambda'', \quad b_{p_\lambda} = a_\lambda''',$$

so ist jedes Glied $b_\nu$ *einem* bestimmten Gliede der Folge $(a_\nu)$ gleich *und umgekehrt*, sodaß also die Folge $(b_\nu)$ lediglich eine Umordnung der Folge $(a_\nu)$ darstellt. Andererseits hat man aber nach (1) und (2):

$$(4) \qquad P_{m_\lambda} \cdot b_{m_\lambda} = P_{m_\lambda} \cdot a_\lambda' \leqq \varepsilon_\lambda, \quad Q_{n_\lambda} \cdot b_{n_\lambda} = Q_{n_\lambda} \cdot a_\lambda'' \geqq \frac{1}{\varepsilon_\lambda},$$

d. h.:

$$(5) \qquad \varliminf_{\nu \to \infty} P_\nu \cdot b_\nu = 0, \quad \varlimsup_{\nu \to \infty} Q_\nu \cdot b_\nu = \infty, \quad \text{q. e. d.}$$

2. Aus dem eben bewiesenen Satze wird nun aber evident, daß es kein *absolut* d. h. *in allen Fällen wirksames* Divergenz- oder Konvergenzkriterium erster Art geben kann: denn die Wirksamkeit *jedes* solchen Kriteriums läßt sich durch bloße *Umordnung* der Reihenglieder aufheben. Und aus demselben Grunde kann es auch *keine* mit $\nu$ ins Unendliche wachsende Zahlenfolgen $(P_\nu)$, $(Q_\nu)$ geben, derart, daß die Beziehung:

$$\lim_{\nu \to \infty} P_\nu \cdot a_{\nu+p} > 0 \quad (\text{bzw. } \varliminf_{\nu \to \infty} P_\nu \cdot a_{\nu+p} > 0)$$

eine *notwendige* Bedingung für die *Divergenz*, oder die Beziehung:

$$\lim_{\nu \to \infty} Q_\nu \cdot a_{\nu+p} < \infty \quad (\text{bzw. } \varlimsup_{\nu \to \infty} Q_\nu \cdot a_{\nu+p} < \infty)$$

eine solche für die *Konvergenz* darstellt. —

Wählt man die zur Kriterienbildung dienenden $D_\nu$, $C_\nu$ speziell in *der* Weise, daß sie mit $\nu$ *monoton* ins Unendliche wachsen, wie z. B. bei den Bonnetschen Kriterien (Formel (C') des vorigen Paragraphen):

$$\left.\begin{array}{ll}\varliminf\limits_{\nu\to\infty} L_k(\nu)\cdot a_\nu > 0: & \textit{Divergenz}\,^{1)} \\ \varlimsup\limits_{\nu\to\infty} L_k(\nu)\,(\lg_k \nu)^\varrho\cdot a_\nu < \infty: & \textit{Konvergenz}\quad (\varrho > 0)\end{array}\right\}\ (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

so wird offenbar als *günstigste* Anordnung für deren Brauchbarkeit diejenige erscheinen, bei welcher die $a_\nu$ mit wachsendem $\nu$ sich gleichfalls *monoton* ändern, d. h. (da wir ein für allemal $\lim a_\nu = 0$ annehmen dürfen) *monoton abnehmen* bzw. *niemals zunehmen.* Wir wollen nun zeigen, daß auch in diesem besonderen Falle die Tragweite jener Kriterien eine *begrenzte* ist, d. h. es gibt sowohl *divergente,* als *konvergente* Reihen mit *monoton abnehmenden* Gliedern, bei denen *jedes* der obigen Kriterien in der Weise *versagt,* daß *eine* der beiden durch Gl. (I) und (II) charakterisierten Eventualitäten eintritt.

3. Wir betrachten zunächst denjenigen Fall, der an das Auftreten der Gleichungen (I) anknüpft. Es handelt sich also hierbei um die Herstellung solcher Zahlenfolgen $(a_\nu)$, für welche gleichzeitig:

$$(6)\qquad \varliminf_{\nu\to\infty} L_k(\nu)\cdot a_\nu = 0,\quad \varlimsup_{\nu\to\infty} L_k(\nu)\cdot(\lg_k \nu)^\varrho\cdot a_\nu = \infty\quad (\varrho > 0),$$

wie *groß* man auch den Index $k$ annehmen möge. Man erzielt aber dieses Resultat in der einfachsten Weise, indem man setzt:

$$(7)\qquad a_\nu = \frac{1}{L_{m_\nu}(\nu)},$$

wo $m_\nu$ eine natürliche Zahl bedeutet, die mit wachsendem $\nu$ *niemals abnimmt,* vielmehr *in passender* (sogleich näher anzugebender) *Weise zunimmt* und schließlich *ins Unendliche wächst.* Die *Zunahme* der $m_\nu$ ist dabei lediglich an die Beschränkung gebunden, daß $L_{m_\nu}(\nu)$ allemal *positiv* ausfallen und mit $\nu$ *monoton zunehmen* soll, was offenbar erreicht wird, wenn man $m_\nu$ irgendeinen bestimmten Zahlenwert $\lambda$ $(\lambda = 1, 2, 3, \cdots)$ *frühestens* dann annehmen läßt, wenn $\nu$ *groß genug* geworden ist, daß $\lg_\lambda \nu > 1$ ausfällt.

Wir wollen nun, um irgendeine definitive Festsetzung zu treffen, die Zunahme der $m_\nu$ so regulieren, daß bei dem *ersten* $\nu$, für welches der Fall $\lg_\lambda \nu > 1$ eintritt, $m_\nu$ auch *wirklich sofort* den Wert $\lambda$ erhalten soll.

---

1) Ich schreibe jetzt statt $a_{\nu+p}$ etwas einfacher $a_\nu$, was offenbar ohne jede Beschränkung der Allgemeinheit geschehen kann. Denn man hat (für $k = 0, 1, 2, \cdots$):

$$\lg_k(\nu+p) \cong \lg_k(\nu),$$
$$L_k(\nu+p) \cong L_k(\nu),$$

kann also zunächst in den betreffenden Kriterien $\lg_k(\nu)$, $L_k(\nu)$ ohne weiteres durch $\lg_k(\nu+p)$, $L_k(\nu+p)$ ersetzen und schließlich $\nu$ statt $\nu+p$ schreiben.

Zur genaueren Beurteilung der auf diese Weise sich ergebenden *sukzessiven Zunahme* der $m_\nu$ führen wir die folgenden Bezeichnungen ein[1]):

$$(8) \qquad e = e_1 \quad e^{e_1} = e_2 \quad e^{e_2} = e_3 \cdots e^{e_{\lambda-1}} = e_\lambda \cdots\cdots,$$

sodaß also:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} \lg_1 e_1 = 1 & \lg_1 e_2 = e_1 & \lg_1 e_3 = e_2 & \cdots\cdots & \lg_1 e_\lambda = e_{\lambda-1} \cdots\cdots \\ & \lg_2 e_2 = 1 & \lg_2 e_3 = e_1 & \cdots\cdots & \lg_2 e_\lambda = e_{\lambda-2} \cdots\cdots \\ & & \lg_3 e_3 = 1 & \cdots\cdots & \lg_3 e_\lambda = e_{\lambda-3} \cdots\cdots \\ & & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & & & \cdots & \lg_k e_\lambda = e_{\lambda-k} \cdots\cdots \\ & & & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & & & & \lg_\lambda e_\lambda = 1 \qquad \cdots\cdots \end{array} \right.$$

Alsdann hat man (für $\lambda = 1, 2, 3, \cdots$) zu setzen:

$$(10) \quad m_\nu = \lambda, \quad \text{solange: } e_\lambda < \nu \leqq e_{\lambda+1},\text{[2]) d. h.: } [e_\lambda] + 1 \leqq \nu \leqq [e_{\lambda+1}],$$

wenn wiederum das Symbol $[x]$ die größte in $x$ enthaltene ganze Zahl bedeutet. Es bleibt also $m_\nu$ *unveränderlich* $= \lambda$, solange $\nu$ sich in den angegebenen Grenzen bewegt, und *wächst* erst wieder um 1, sobald $\nu$ die Zahl $e_{\lambda+1}$ *übersteigt*. Zu den *bis dahin* vorhandenen Faktoren von $L_{m_\nu}(\nu) = \nu \cdot \lg_1 \nu \cdots \lg_\lambda \nu$ tritt dann noch der weitere: $\lg_{\lambda+1} \nu > 1$ hinzu, sodaß die *Monotonie* der Zunahme von $L_{m_\nu}(\nu)$ keine Unterbrechung erleidet.

1) Vgl. § 38, S. 242, Gl. (9). *Dort* wurde gesetzt:

$$e^\nu = e_\nu^{(1)}, \quad e^{e_\nu^{(1)}} = e_\nu^{(2)}, \quad e^{e_\nu^{(2)}} = e_\nu^{(3)}, \cdots,$$

sodaß also die jetzigen Bezeichnungen:

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \cdots$$

in jener früher benützten Schreibweise lauten würden:

$$e_1^{(1)}, \quad e_1^{(2)}, \quad e_1^{(3)}, \cdots.$$

2) Ich lasse es dahingestellt, ob der Fall:

$$\nu = e_{\lambda+1} = [e_{\lambda+1}],$$

welcher bei der Formulierung der Bedingungen (10) als *möglich* zugelassen ist, in Wirklichkeit jemals eintreten könne. Man weiß nämlich nur, daß, gerade so wie $e$ selbst, auch jede *rationale* Potenz von $e$ eine *Irrationalzahl* ist. Dagegen erscheint es immerhin *fraglich*, ob nicht $e_\lambda$ für irgendwelche Werte von $\lambda$ eine *rationale* oder sogar eine *ganze* Zahl sein könnte. Das *Gegenteil* ist wenigstens, soviel ich weiß, bisher *nicht* bewiesen worden.

Wird jetzt eine natürliche Zahl $k$ beliebig groß vorgeschrieben, so hat man nach (10):

$$m_\nu \geqq k+1, \quad \text{wenn:} \quad \nu > e_{k+1},$$

und daher:

(11) $$L_{m_\nu}(\nu) \geqq L_{k+1}(\nu) \quad \text{für} \quad \nu > e_{k+1}.$$

Da aber: $L_{k+1}(\nu) \succ L_k(\nu)$, so folgt *a fortiori:*

(12) $$L_{m_\nu}(\nu) \succ L_k(\nu), \quad \text{also:} \quad a_\nu \prec \frac{1}{L_k(\nu)} \quad \text{(für jedes noch so große } k\text{)},$$

oder anders geschrieben:

$$\lim_{\nu\to\infty} L_k(\nu)\cdot a_\nu = 0,$$

wie oben (Gl. (6)) behauptet wurde. *Die Reihe $\sum a_\nu$ reagiert also auf keins der logarithmischen Divergenzkriterien.*

4. Nicht ganz so unmittelbar erkennt man, daß auch jedes der logarithmischen *Konvergenz*kriterien hier versagen muß. Wird zunächst wiederum $k$ beliebig groß fixiert, so kann man $\nu$ so groß annehmen, daß $m_\nu$ die Zahl $k$ um eine beliebige natürliche Zahl $\mu$ übersteigt. Setzt man nämlich in (10):

(13) $$e_{k+\mu} < \nu \leqq e_{k+\mu+1}, \quad \text{so wird:} \quad m_\nu = k+\mu.$$

Man hat sodann:

(14) $$L_k(\nu)\cdot(\lg_k \nu)^\varrho \cdot a_\nu = \frac{(\lg_k \nu)^\varrho}{\lg_{k+1}\nu \cdot \lg_{k+2}\nu \cdots \lg_{k+\mu}\nu}.$$

Nun steht nach § 38, S. 244, Ungl. (25a) allerdings fest, daß:

(15) $$(\lg_k \nu)^\varrho \succ \lg_{k+1}\nu\cdot\lg_{k+2}\nu\cdots\lg_{k+\mu}\nu$$

für jedes beliebig klein vorgeschriebene $\varrho > 0$ und jedes *beliebig groß vorgeschriebene*, aber sodann als *unveränderlich* anzusehende $\mu$. Da aber in dem vorliegenden Falle $\mu = m_\nu - k$ gleichzeitig mit $\nu$ *ins Unendliche* wächst, so muß erst ausdrücklich bewiesen werden, daß die Relation (15) für diesen Fall noch gültig bleibt. Wir gehen hierbei aus von der Beziehung:

(16) $$e^\alpha > \alpha^2 \quad \text{für} \quad \alpha > 0,$$

deren Richtigkeit sich in folgender Weise ergibt. Aus:

$$e^\alpha > \left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu$$

$$= 1 + \alpha + \frac{\nu-1}{\nu}\cdot\frac{\alpha^2}{2} + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{\nu^2}\cdot\frac{\alpha^3}{2\cdot 3} + \frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{\nu^3}\cdot\frac{\alpha^4}{2\cdot3\cdot4} + \cdots$$

folgt für $\nu \to \infty$:

$$e^\alpha > 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^4}{24}.$$

Ist nun: $0 < \alpha \leqq 2$, so wird:

$$\alpha^2 \leqq 2\alpha, \quad \text{also:} \quad \alpha \geqq \frac{\alpha^2}{2} \quad \text{und daher:} \quad e^\alpha > \alpha^2.$$

Ist dagegen $\alpha > 2$, so hat man:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha^3 > 2\alpha^2, & \text{also:}\ \frac{\alpha^3}{6} > \frac{\alpha^2}{3} \\ \alpha^2 > 4 \quad \alpha^4 > 4\alpha^2, & \text{also:}\ \frac{\alpha^4}{24} > \frac{\alpha^2}{6} \end{array}\right\} \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^4}{24} > \frac{\alpha^2}{2},$$

und daher schließlich wiederum:

$$e^\alpha > \alpha^2.$$

Setzt man jetzt in Gl. (16) $\alpha = \lg_{\lambda+1} \nu$ und beachtet, daß:

$$e^{\lg_{\lambda+1}\nu} = e^{\lg(\lg_\lambda \nu)} = \lg_\lambda \nu,$$

so ergibt sich:

(17) $\quad \lg_\lambda \nu > (\lg_{\lambda+1} \nu)^2, \quad$ wenn: $\lg_{\lambda+1} \nu > 0$, d. h. $\nu > e_\lambda$.

Durch Substitution von $\lambda = k+1, k+2, \cdots, k+\mu-1$ und Multiplikation der betreffenden Ungleichungen folgt sodann:

$$\lg_{k+1} \nu \cdot \lg_{k+2} \nu \cdots \lg_{k+\mu-1} \nu > (\lg_{k+2} \nu \lg_{k+3} \nu \cdots \lg_{k+\mu} \nu)^2$$

und nach Weglassung der gemeinsamen Faktoren und nochmaliger Multiplikation mit $\lg_{k+1} \nu$:

(18) $\quad (\lg_{k+1} \nu)^2 > \{\lg_{k+1} \nu \cdot \lg_{k+2} \nu \cdots \lg_{k+\mu-1} \nu\} \cdot (\lg_{k+\mu} \nu)^2,$

wenn: $\lg_{k+\mu} \nu > 0$, d. h. $\nu > e_{k+\mu-1}$.

Nimmt man hier nicht nur $\nu > e_{k+\mu-1}$, sondern in Übereinstimmung mit Ungl. (13) $\nu > e_{k+\mu}$, so wird $\lg_{k+\mu} \nu > 1$ (s. die Gleichungen (9)) und daher *a fortiori*:

(19) $\quad (\lg_{k+1} \nu)^2 > \lg_{k+1} \nu \cdot \lg_{k+2} \nu \cdots \lg_{k+\mu} \nu, \quad$ wenn: $\nu > e_{k+\mu}$,

oder wenn man wieder (s. (13)) $k+\mu$ durch $m_\nu$ ersetzt:

(20) $\quad (\lg_{k+1} \nu)^2 > \lg_{k+1} \nu \cdot \lg_{k+2} \nu \cdots \lg_{m_\nu} \nu, \quad$ wenn: $\nu > e_{m_\nu}$.

Dabei ist nur, damit die Ungleichung einen Sinn hat, jedenfalls $m_\nu \geqq k+1$ zu nehmen, dagegen ist $m_\nu$ an gar keine *obere* Schranke gebunden und darf also nach Maßgabe der definierenden Bedingung (10) gleichzeitig mit $\nu$ unbegrenzt vergrößert werden.

Da nun andererseits nach S. 241, Gl. (5):

$$(\lg_k \nu)^\varrho \succ (\lg_{k+1} \nu)^2 \quad \text{für jedes } \varrho > 0,$$

so folgt schließlich *a fortiori* auch:

(21) $\quad (\lg_k \nu)^\varrho \succ \lg_{k+1} \nu \cdot \lg_{k+2} \nu \cdots \lg_{m_\nu} \nu,$

und daher:

(22) $L_k(\nu)\cdot(\lg_k \nu)^\varrho \succ L_{m_\nu}(\nu)$, d. h. $\lim\limits_{\nu\to\infty} L_k(\nu)\cdot(\lg_k \nu)^\varrho\cdot a_\nu = \infty \quad (\varrho > 0)$,

sodaß also in der Tat $\sum a_\nu$ *auch auf keins der logarithmischen Konvergenzkriterien reagiert.*

5. Wir werden sogleich direkt nachweisen, daß die Reihe $\sum a_\nu$ *divergiert.* Um aber zugleich auch aus *monoton* abnehmenden Gliedern gebildete *konvergente* Reihen zu erhalten, bei denen *jedes* logarithmische Kriterium in dem Sinne der Gleichungen (I) bzw. (6) *versagt,* betrachten wir den etwas allgemeineren Ausdruck:

$$a_\nu^{(\sigma)} = \frac{1}{L_{m_\nu}(\nu)\cdot m_\nu^\sigma}, \quad \text{wo: } \sigma \geqq 0, \tag{23}$$

welcher für $\sigma = 0$ in den bisher betrachteten $a_\nu$ (also: $a_\nu^{(0)} = a_\nu$) übergeht, und zeigen, daß $\sum a_\nu^{(\sigma)}$ *divergiert* für $\sigma \leqq 1$, dagegen *konvergiert* für $\sigma > 1$, während sich die $a_\nu^{(\sigma)}$ in bezug auf die logarithmischen Kriterien geradeso verhalten wie die $a_\nu$ (s. Gl. (6)).

Bezüglich der *Divergenz*kriterien ergibt sich dies ohne weiteres aus der Beziehung:

$$a_\nu^{(\sigma)} \leqq a_\nu^{(0)} = a_\nu \quad \text{für: } \sigma \geqq 0,$$

da hieraus mit Berücksichtigung von (12) folgt:

$$a_\nu^{(\sigma)} \prec \frac{1}{L_k(\nu)}, \quad \text{d. h. } \lim_{\nu\to\infty} L_k(\nu)\cdot a_\nu^{(\sigma)} = 0. \tag{24}$$

Wird sodann wieder, nachdem man $k$ beliebig groß fixiert hat, $\nu$ in die Grenzen eingeschlossen:

$$e_{k+\mu} < \nu \leqq e_{k+\mu+1}, \quad \text{sodaß also: } m_\nu = k+\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots)$$

(s. (13)), so hat man:

$$\lg_k \nu > \lg_k e_{k+\mu} = e_\mu \quad (\text{wegen: } \lg_k e_\lambda = e_{\lambda-k}, \text{ s. Gl. (9), S. 356}),$$

und daher:

$$\frac{(\lg_k \nu)^p}{m_\nu^q} > \frac{e_\mu^p}{(k+\mu)^q} = \left(\frac{\mu}{k+\mu}\right)^q\cdot\frac{e_\mu^p}{\mu^q}. \tag{25}$$

Da aber:

$$e_1 = e > 2, \quad e_2 = e^{e_1} > 1 + e_1 > 3, \quad e_3 = e^{e_2} > 1 + e_2 > 4 \quad \text{usf.},$$

so folgt:

$$e_{\mu-1} > \mu \quad \text{und schließlich: } e_\mu = e^{e_{\mu-1}} > e^\mu.$$

Hiernach ergibt sich aus (25) *a fortiori*:

$$\frac{(\lg_k \nu)^p}{m_\nu^q} > \left(\frac{\mu}{k+\mu}\right)^q\cdot\frac{(e^\mu)^p}{\mu^q} \tag{26}$$

und daher, da gleichzeitig mit $\nu$ auch $\mu$ über alle Grenzen wächst, nach § 38, S. 239, Gl. (1):

$$(27)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{(\lg_k \nu)^p}{m_\nu^{\,q}} = \infty, \quad \text{also:}\ m_\nu^{\,q} \prec (\lg_k \nu)^p,$$

auch wenn man $p > 0$ *beliebig klein*, $q > 0$ *beliebig groß* fixiert.

Die Folge der $m_\nu$ wächst also auch nach der in § 38, Nr. 2 gebrauchten Terminologie (vgl. S. 241, Fußn. 1) *unendlich viel langsamer* ins Unendliche als $\lg_k \nu$ bei *beliebig groß* angenommenem $k$.[1])

Man hat nun schließlich:

$$L_k(\nu)\cdot(\lg_k \nu)^\varrho \cdot a_\nu^{(\sigma)} = \frac{L_k(\nu)\cdot(\lg_k(\nu))^\varrho}{L_{m_\nu}(\nu)\cdot m_\nu^{\;\sigma}}$$

$$= \frac{(\lg_k \nu)^{\frac{1}{2}\varrho}}{\lg_{k+1}\nu\cdot\lg_{k+2}\nu\cdots\lg_{m_\nu}\nu}\cdot\frac{(\lg_k \nu)^{\frac{1}{2}\varrho}}{m_\nu^{\;\sigma}}$$

und daher mit Benützung von (21) und (27):

$$(28)\qquad \lim_{\nu\to\infty} L_k(\nu)\cdot(\lg_k \nu)^\varrho\cdot a_\nu^{(\sigma)} = \infty \quad\text{oder auch:}\ a_\nu^{(\sigma)} \succ \frac{1}{L_k(\nu)\cdot(\lg_k \nu)^\varrho}$$

bei beliebig groß angenommenem $k$. Die Reihe $\sum a_\nu^{(\sigma)}$ reagiert daher auch auf keins der logarithmischen *Konvergenz*kriterien.

6. Um nun die *Divergenz* bzw. *Konvergenz* der Reihe $\sum a_\nu^{(\sigma)}$ festzustellen, fassen wir jedesmal alle diejenigen Glieder $a_\nu^{(\sigma)}$ zu einer Gruppe $A_\lambda^{(\sigma)}$ zusammen, für welche $m_\nu$ den unveränderlichen Wert $\lambda$ hat (wobei dann der Reihe nach: $\lambda = 1, 2, 3, \cdots$). Da nun nach (10):

$$m_\nu = \lambda, \quad\text{so lange:}\ [e_\lambda] + 1 \leqq \nu \leqq [e_{\lambda+1}],$$

so hat man also zu setzen:

$$(29)\qquad A_\lambda^{(\sigma)} = \sum_{[e_\lambda]+1}^{[e_{\lambda+1}]}{}_{\nu}\, a_\nu^{(\sigma)} = \frac{1}{\lambda^\sigma}\sum_{[e_\lambda]+1}^{[e_{\lambda+1}]}{}_{\nu}\,\frac{1}{L_\lambda(\nu)},$$

und sodann:

1) Bei der Folge $(m_\nu)$ besitzen auf Grund der definierenden Bedingung (10) bestimmte Gruppen konsekutiver Glieder immer *einen und denselben* Wert. Will man die Faktoren $m_\nu^\sigma$ durch eine wirklich beständig *zu*nehmende Folge $m_\nu'^{\sigma}$ von gleichem „Unendlich" ersetzen, so braucht man zu den betreffenden $m_\nu$ nur die Glieder einer monoton *zu*nehmenden Folge mit *endlichem* Grenzwert zu addieren. Man setze z. B.:

$$m_\nu' = m_\nu + \frac{\nu - 1}{\nu}.$$

$$(30) \qquad \sum_{[e_1]+1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu^{(\sigma)} = \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} A_\lambda^{(\sigma)},$$

in dem Sinne, daß die beiden Reihen nicht nur im Falle der *Konvergenz* dieselbe Summe besitzen, sondern daß die *Divergenz* der einen Reihe auch diejenige der anderen nach sich zieht.

Nun ist nach § 38, Ungl. (28a), S. 246:

$$\lg_{\lambda+1} M_\nu - \lg_{\lambda+1} M_{\nu-1} \begin{cases} < \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_\lambda(M_{\nu-1})}, \\ > \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_\lambda(M_\nu)}, \end{cases}$$

und daher, wenn man in der *ersten* Ungleichung $M_\nu = \nu + 1$, in der *zweiten* $M_\nu = \nu$ setzt:

$$(31) \qquad \frac{1}{L_\lambda(\nu)} \begin{cases} > \lg_{\lambda+1}(\nu+1) - \lg_{\lambda+1}\nu, \\ < \lg_{\lambda+1}\nu - \lg_{\lambda+1}(\nu-1). \end{cases}$$

Mit Benützung dieser Ungleichungen ergibt sich:

$$\sum_{[e_\lambda]+1}^{[e_{\lambda+1}]}{}^{\nu} \frac{1}{L_\lambda(\nu)} \begin{cases} > \lg_{\lambda+1}[e_{\lambda+1}+1] - \lg_{\lambda+1}[e_\lambda+1] > \lg_{\lambda+1} e_{\lambda+1} - \lg_{\lambda+1}[e_\lambda+1], \\ < \lg_{\lambda+1}[e_{\lambda+1}] \quad - \lg_{\lambda+1}[e_\lambda] \quad < \lg_{\lambda+1} e_{\lambda+1} - \lg_{\lambda+1}[e_\lambda], \end{cases}$$

und da andererseits nach (9):

$$\lg_{\lambda+1} e_{\lambda+1} = 1,$$

so wird:

$$\sum_{[e_\lambda]+1}^{[e_{\lambda+1}]}{}^{\nu} \frac{1}{L_\lambda(\nu)} \begin{cases} > 1 - \lg_{\lambda+1}[e_\lambda+1], \\ < 1 - \lg_{\lambda+1}[e_\lambda] \quad , \end{cases}$$

sodaß man setzen kann:

$$(32) \qquad \sum_{[e_\lambda]+1}^{[e_{\lambda+1}]}{}^{\nu} \frac{1}{L_\lambda(\nu)} = \vartheta_\lambda,$$

wo $\vartheta_\lambda$ einen mittleren Wert zwischen $1 - \lg_{\lambda+1}[e_\lambda+1]$ und $1 - \lg_{\lambda+1}[e_\lambda]$, also eine wesentlich *positive* Zahl bedeutet, die für jeden bestimmten Wert $\lambda$ *endlich und von Null verschieden* ist und für $\lambda \to \infty$ den Grenzwert 1 besitzt. Denn man hat:

$$[e_\lambda + 1] \cong [e_\lambda] \cong e_\lambda, \quad \lg_{\lambda+1} e_\lambda = 0,$$

und daher:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lg_{\lambda+1}[e_\lambda + 1] = \lim_{\lambda\to\infty} \lg_{\lambda+1}[e_\lambda] = 0.$$

Somit wird schließlich:

$$(33)\qquad \sum_{[e_1]+1}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu^{(\sigma)} = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, \frac{\vartheta_\lambda}{\lambda^\sigma},$$

woraus hervorgeht, daß die fragliche Reihe *divergiert* für $\sigma \leqq 1$, dagegen *konvergiert* für $\sigma > 1$. Insbesondere *divergiert* also auch die für $\sigma = 0$ resultierende, in Nr. 3 zunächst betrachtete Reihe $\sum \frac{1}{L_{m_\nu}(\nu)}$.

Es hätte übrigens die Vermutung nahe gelegen, daß die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$(34)\qquad b_\nu^{(\varrho)} = \frac{1}{L_{m_\nu}(\nu)\cdot(\lg_{m_\nu}\nu)^\varrho}$$

analog, wie $\sum \frac{1}{L_k(\nu)\cdot(\lg_k \nu)^\varrho}$, für $\varrho > 0$ *konvergieren* müßte, sodaß man auf diese Weise Reihen erhalten würde, welche dann, wie unmittelbar zu ersehen, *schwächer* konvergierten, als *jede* der betreffenden logarithmischen Reihen, während zugleich ihr Bildungsgesetz eine vollkommenere Analogie mit den letzteren darböte, als dies bei den Reihen $\sum a_\nu^{(\sigma)}$ der Fall ist.

Indessen läßt sich leicht zeigen, daß $\sum b_\nu^{(\varrho)}$, sogar für jedes beliebig groß fixierte $\varrho$, *divergiert.* Da nämlich nach (10) für $m_\nu = \lambda$ ($\lambda = 1, 2, 3, \cdots$) der Index $\nu$ den Bedingungen genügt: $e_\lambda < \nu \leqq e_{\lambda+1}$, so bewegt sich der Faktor $(\lg_{m_\nu} \nu)^\varrho$ stets innerhalb der Grenzen $1^\varrho$ und $e^\varrho$. Mithin hat man:

$$(35)\qquad b_\nu^{(\varrho)} \geqq \frac{1}{e^\varrho}\cdot\frac{1}{L_{m_\nu}(\nu)} = \frac{a_\nu}{e^\varrho},$$

woraus dann unmittelbar die *Divergenz* der fraglichen Reihe hervorgeht.

7. Von den beiden Reihen:

$$(36)\qquad \sum{}_{\nu}\, \frac{1}{L_{m_\nu}(\nu)\cdot m_\nu}, \quad \sum{}_{\nu}\, \frac{1}{L_{m_\nu}(\nu)\cdot m_\nu^{1+\varrho}} \quad (\varrho > 0)$$

*divergiert* somit die *erste* und *konvergiert* die *zweite schwächer* als *jede* Reihe der unbegrenzten Skala:

$$(37)\qquad \sum{}_{\nu}\, \frac{1}{L_k(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad \sum{}_{\nu}\, \frac{1}{L_k(\nu)\cdot(\lg_k \nu)^\varrho} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Daß es aber wiederum *noch schwächer* divergierende bzw. konvergierende Reihen geben muß, folgt aus den allgemeinen Sätzen von §§ 48, 49. Man erhält insbesondere wieder *unbegrenzte Skalen* derartiger Reihen, die

sich an die Reihen (36) geradeso anschließen, wie die gewöhnlichen logarithmischen Reihen (37) an die Anfangsreihen $\sum \frac{1}{\nu}$, $\sum \frac{1}{\nu^{1+\varrho}}$, wenn man bildet:

$$(38) \qquad \sum_\nu \frac{1}{L_{m_\nu}(\nu)\cdot L_k(m_\nu)}, \quad \sum_\nu \frac{1}{L_{m_\nu}(\nu)\cdot L_k(m_\nu)\cdot(\lg_k m_\nu)^\varrho} \quad (\varrho>0).$$

Denn es ergibt sich, vollkommen analog mit Gl. (33):

$$(39) \qquad \sum_{[e_p]+1}^{\infty} {}_\nu \frac{1}{L_{m_\nu}(\nu)\cdot L_k(m_\nu)\cdot(\lg_k m_\nu)^\varrho} = \sum_{p}^{\infty} {}_\lambda \frac{\vartheta_\lambda}{L_k(\lambda)\cdot(\lg_k \lambda)^\varrho} \quad (p \geqq e_k)$$

(man hat hierzu lediglich den in $a_\nu^{(\sigma)}$ — Gl. (23) — auftretenden Faktor $m_\nu^\sigma$ durch: $L_k(m_\nu)\cdot(\lg_k m_\nu)^\varrho$ zu ersetzen), und man erkennt somit unmittelbar die *Divergenz* der betreffenden Reihen für $\varrho = 0$, ihre *Konvergenz* für $\varrho > 0$.

Schließlich lassen sich dann aber auch wieder Reihen herstellen, die nicht nur *schwächer* divergieren bzw. konvergieren, als *irgendeine* beliebig vorgeschriebene, sondern als *jede* Reihe der obigen Skala — usf. *in infinitum.*

Diese Betrachtungen, welche im übrigen keineswegs auf der besonderen Form der hier zugrunde gelegten Reihenskalen beruhen, sondern ohne merkliche Schwierigkeit auf jedes beliebige Skalenpaar von divergenten und konvergenten Reihen übertragbar sind, führen zu der Erkenntnis, daß das *Grenzgebiet* zwischen *Divergenz* und *Konvergenz* sich in *sehr viel engere Schranken* einschließen läßt, als durch *jedes beliebige Skalenpaar* von divergenten und konvergenten Reihen, und daß es andererseits unmöglich erscheint, auf diesem Wege jemals zu einer *Grenze* zwischen *Divergenz* und *Konvergenz* zu gelangen.

## § 53. Grenzgebiete und Schranken der Divergenz und Konvergenz für Reihen mit monoton abnehmenden Gliedern.

1. Die am Schlusse des vorigen Paragraphen benützten Ausdrücke: „*Grenzgebiet*“ zwischen Divergenz und Konvergenz und „*Schranken*“ dieses Grenzgebietes — können, auch bei der Beschränkung auf Reihen mit monoton abnehmenden Gliedern[1]), leicht zu falschen Vorstellungen über die Tragweite der damit zu verbindenden Begriffe führen. Um in

1) Für Reihen mit schließlich gegen *Null* konvergierenden, aber *nicht* monoton abnehmenden Gliedern kann von irgendwelchen Divergenz- oder Konvergenz-„*Schranken*“ überhaupt nicht die Rede sein. Denn ist $\sum a_\nu$ irgendwie vorgelegt, so kann man nach dem Satze von Nr. 1 des vorigen Paragraphen (S. 353) durch bloße

dieser Hinsicht jedes Mißverständnis auszuschließen, stellen wir die folgenden Betrachtungen an.

Es sei $d_\nu > c_\nu > 0$, $\sum d_\nu$ eine *divergente*, $\sum c_\nu$ eine *konvergente* Reihe mit *monoton* gegen Null abnehmenden Gliedern, die $d_\nu$, $c_\nu$ können dabei als *„beliebig nahe"* aneinander liegend angenommen werden, d. h. so, daß $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{d_\nu}{c_\nu}$ oder selbst auch nur: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{d_\nu}{c_\nu}$ ein *beliebig niedriges Unendlich* vorstellt.

Bedeutet dann ferner $(a_\nu)$ irgendeine andere monoton abnehmende Zahlenfolge, so *divergiert* die Reihe $\sum a_\nu$, wenn für *alle* $\nu$, zum mindesten von einem bestimmten Werte $\nu = n$ anfangend:

(A) $$a_\nu \geqq d_\nu;$$

sie *konvergiert*, wenn:

(B) $$a_\nu \leqq c_\nu.$$

Ist dagegen:

(C) $$c_\nu \leqq a_\nu \leqq d_\nu$$

(wobei die *Gleichheits*zeichen in (C) nur soweit gelten sollen, daß die Eventualitäten: $a_\nu = d_\nu$, bzw. $a_\nu = c_\nu$ für *jedes* $\nu \geqq n$, als unter (A) bzw. (B) gehörig ausscheiden), so kann die Reihe noch *divergieren* oder *konvergieren*. Wir sagen alsdann, sie gehöre dem von den *„Schranken"* $(d_\nu)$ und $(c_\nu)$ eingeschlossenen *„Grenzgebiete"* zwischen Divergenz und Konvergenz an: es ist nämlich offenbar *unmöglich*, über ihre *Divergenz* oder *Konvergenz* lediglich auf Grund der Beziehung (C) irgendwelche Aussage zu machen.

Nun darf man aber keineswegs glauben, daß durch *irgendwelche* derartige *Schranken* etwa *alle möglichen* Reihen mit *monoton abnehmenden* Gliedern $a_\nu$ in drei wohlgesonderte Klassen vom Charakter (A), (B), (C) zerlegt werden können. Vielmehr gilt der folgende Satz:

(I) *Wie man auch monoton gegen Null abnehmende Folgen $(d_\nu)$, $(c_\nu)$, wo $d_\nu > c_\nu$, wählen möge*[1]*), so gibt es stets unend-*

---

Gliederumordnung eine Reihe $\sum b_\nu$ daraus herstellen, sodaß:

$$\varliminf_{\nu\to\infty} C_\nu \cdot b_\nu = 0, \quad \varlimsup_{\nu\to\infty} D_\nu b_\nu = +\infty,$$

auch wenn $\sum D_\nu^{-1}$, $\sum C_\nu^{-1}$ *beliebig stark* divergiert bzw. konvergiert (ersteres natürlich mit der Einschränkung: $\lim\limits_{\nu\to\infty} D_\nu = \infty$). Die Reihe $\sum b_\nu$ enthält also, mag sie selbst divergieren oder konvergieren, sicher unendlich viele Glieder, welche teils *unter*, teils *über* den entsprechenden von $\sum C_\nu^{-1}$ bzw. $\sum D_\nu^{-1}$ liegen.

1) Dabei haben also die (nur wegen des Hinweises auf die Ungleichungen (A), (B), (C) beibehaltenen) Buchstaben $d_\nu$, $c_\nu$ zunächst noch keineswegs die sonstige *typische* Bedeutung (d. h. es ist in dem vorliegenden Zusammenhange ganz gleichgültig, ob die Reihen $\sum d_\nu$, $\sum c_\nu$ divergieren oder konvergieren).

*lich viele monotone Folgen* $(a_\nu')$, *welche die beiden Schranken* $(d_\nu)$, $(c_\nu)$ *unendlich oft durchsetzen, die also keiner der drei Klassen* (A), (B), (C) *angehören; d. h. man hat für unendlich viele* $\mu$, $\lambda$:

(A′) $$a_\mu' > d_\mu, \quad a_\lambda' < c_\lambda.^{1)}$$

Beweis. Es bedeute $(p_\nu)$ eine vorläufig ganz willkürlich zu denkende Folge positiver Zahlen. Man bestimme sodann eine unbegrenzt fortsetzbare Reihe wachsender natürlicher Zahlen $m_1, m_2, m_3, \cdots$ in *der* Weise, daß:

$$p_1 c_{m_1} < p_0 d_0, \; p_2 d_{m_2} < p_1 c_{m_1}, \; p_3 c_{m_3} < p_2 d_{m_2}, \; p_4 d_{m_4} < p_3 c_{m_3}, \cdots\cdots$$

(was offenbar *stets* und auf unendlich viele Arten möglich ist, da sowohl die $c_\nu$, als die $d_\nu$ monoton gegen *Null* abnehmen). Man erhält durch dieses Verfahren eine unbegrenzte *monoton abnehmende* Folge von der Form:

$$p_0 d_{m_0} > p_1 c_{m_1} > p_2 d_{m_2} > p_3 c_{m_3} > \cdots > p_{2k} d_{m_{2k}} > p_{2k+1} c_{m_{2k+1}} > \cdots\cdots$$

(wenn man der Gleichförmigkeit halber noch $m_0$ statt 0 schreibt).

Setzt man jetzt:

(1) $$a_{m_{2k}}' = p_{2k} d_{m_{2k}}, \quad a_{m_{2k+1}}' = p_{2k+1} c_{m_{2k+1}} \quad (\text{sodaß also: } a_{m_\lambda}' > a_{m_{\lambda+1}}'),$$

und bestimmt im übrigen $a_\nu'$ für alle Werte von $\nu$, die *zwischen* $m_\lambda$ und $m_{\lambda+1}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \cdots)$ liegen, in *der* Weise, daß $a_\nu'$ für

$$\nu = m_\lambda, \; m_\lambda + 1, \; m_\lambda + 2, \cdots, m_{\lambda+1}$$

*monoton* (im übrigen willkürlich) von $a_{m_\lambda}'$ zu $a_{m_{\lambda+1}}'$ *abnimmt*, so bilden die $a_\nu'$ eine *monoton abnehmende* Folge, welche unendlich viele Glieder von der Form (1) enthält. Wird jetzt über die $p_\nu$ in der Weise verfügt, daß:

$$p_{2k} > 1, \quad p_{2k+1} < 1 \quad (\text{im übrigen immer noch ganz beliebig}),$$

so hat man nach (1):

(2) $$a_{m_{2k}}' > d_{m_{2k}}, \quad a_{m_{2k+1}}' < c_{m_{2k+1}},$$

sodaß also die Folge $(a_\nu')$ in der Tat den Bedingungen (A′) genügt.

---

1) Natürlich gibt es analog auch unendlich viele $(a_\nu'')$, welche nur *eine* der Schranken $(d_\nu)$, $(c_\nu)$ unendlich oft durchsetzen, sodaß also für unendlich viele $\mu$:

(B′) $$c_\mu \leqq a_\mu' \leqq d_\mu,$$

im übrigen

$$\textit{durchweg: } a_\lambda' > d_\lambda \quad \text{bzw. } \textit{durchweg: } a_\lambda' < c_\lambda.$$

Man kann ja derartige Folgen $(a_\nu'')$ mit Leichtigkeit aus solchen vom Charakter (A′) herstellen, indem man alle Glieder $a_\lambda' < c_\lambda$ *passend* (d. h. *so*, daß die Bedingung (B′) erfüllt wird und die Monotonie erhalten bleibt) *vergrößert*, bzw. alle Glieder $a_\mu' > d_\mu$ *passend verkleinert*.

*Wählt man insbesondere die* $p_\nu$ *in der Weise, daß:* $\lim\limits_{k\to\infty} p_{2k} = \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} p_{2k+1} = 0$, *so hat man sogar:*

$$a'_{m_{2k}} > d_{m_{2k}}, \quad a'_{m_{2k+1}} < c_{m_{2k+1}}. \tag{2a}$$

2. Aus dem eben bewiesenen Satze und der daran geknüpften Schlußbemerkung erkennt man aber, wenn man jetzt wieder den Buchstaben $d_\nu$, $c_\nu$ die sonstige typische Bedeutung beilegt, unmittelbar folgendes:

(II) *Wie man auch eine divergente und eine konvergente Reihe* $\sum d_\nu$ *bzw.* $\sum c_\nu$ *(wo:* $d_\nu > c_\nu$*) mit monoton gegen Null abnehmenden Gliedern wählen möge, so gibt es stets unendlich viele Reihen* $\sum a_\nu'$ *mit monoton abnehmenden Gliedern, welche* ***nicht*** *dem von den Schranken* $(d_\nu)$, $(c_\nu)$ *eingeschlossenen* ***Grenzgebiete*** *angehören, und deren Divergenz oder Konvergenz* ***trotzdem nicht*** *durch Vergleichung von* $a_\nu'$ *mit* $d_\nu$, $c_\nu$ *entschieden werden kann.*

Versteht man nämlich unter $(a_\nu')$ eine der unendlich vielen monotonen Folgen, welche der Relation (2a) genügen, so hat man wegen:

$$d_{m_{2k}} > c_{m_{2k}}, \quad c_{m_{2k+1}} < d_{m_{2k+1}}$$

aus (2a) *a fortiori*:

$$a'_{m_{2k}} > c_{m_{2k}} = \frac{1}{C_{m_{2k}}}, \quad a'_{m_{2k+1}} < d_{m_{2k+1}} = \frac{1}{D_{m_{2k+1}}},$$

also:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, C_\nu a_\nu' = \infty, \quad \underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, D_\nu a_\nu' = 0, \tag{3}$$

d. h. das zu $C_\nu$, $D_\nu$ gehörige *Kriterienpaar versagt* hier allemal nach dem Muster der Ungleichungen (II) am Anfange des vorigen Paragraphen.

*Alsdann muß aber auch jedes durch weitere Verschärfung aus* $C_\nu$, $D_\nu$ *abzuleitende Kriterienpaar in derselben Weise versagen.*

Denn, nimmt man: $D_\nu' < C_\nu'$, $D_\nu' > D_\nu$, $C_\nu' < C_\nu$, also: $d_\nu' > c_\nu'$, $d_\nu' < d_\nu$, $c_\nu' > c_\nu$, so folgt aus (2a), daß umsomehr:

$$a'_{m_{2k}} > d'_{m_{2k}}, \quad a'_{m_{2k+1}} < c'_{m_{2k+1}},$$

und hieraus, wegen: $d'_{m_{2k}} > c'_{m_{2k}}$, $c'_{m_{2k+1}} < d'_{m_{2k+1}}$, wiederum *a fortiori*:

$$a'_{m_{2k}} > c'_{m_{2k}} = \frac{1}{C'_{m_{2k}}}, \quad a'_{m_{2k+1}} < d'_{m_{2k+1}} = \frac{1}{D'_{m_{2k+1}}},$$

d. h.:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, C_\nu' a_\nu' = \infty, \quad \underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, D_\nu' a_\nu' = 0. \tag{4}$$

3. Aus dem Satze von Nr. 1 geht ferner hervor, daß es *keinesfalls* ***gleichzeitig*** irgendeine *allgemein gültige Schranke* für die *Divergenz* und eine andere für die *Konvergenz* in *dem* Sinne geben kann, daß die Glieder *aller divergenten* Reihen (mit *monotonen* Gliedern) von irgendeinem be-

stimmten Index ab *durchweg oberhalb* der *einen* (unteren) *Schranke*, die aller *konvergenten* Reihen *unterhalb* der *anderen* (oberen) Schranke liegen müßten. Denn da es doch allemal unendlich viele monotone $(a_\nu')$ gibt, die *beide* Schranken unendlich oft überschreiten, und da andererseits die betreffenden $\sum a_\nu'$ entweder *divergieren* oder *konvergieren* müssen, so gibt es zum mindesten entweder *divergente* Reihen, für welche unendlich viele Glieder noch *unterhalb* der *unteren* Schranke liegen, oder *konvergente* Reihen, bei denen unendlich viele Glieder die *obere* Schranke übersteigen.

Dagegen läßt sich zeigen, daß eine solche *Schranke* für die *Konvergenz allein* existiert, daß dieselbe aber merklich *höher* liegt, als früher gewöhnlich angenommen wurde. Zunächst gilt nämlich der folgende Satz:

(III) *Bei einer konvergenten Reihe mit monotonen (wenn auch nur niemals zunehmenden) Gliedern $a_\nu$ hat man stets:*

(5) $$a_\nu < \frac{1}{\nu}, \quad d.\ h.: \lim_{\nu\to\infty} \nu a_\nu = 0.$$

*Für Reihen mit monotonen positiven Gliedern $a_\nu$ bildet als die Beziehung* (5) *eine notwendige Konvergenzbedingung.*[1])

Beweis. Infolge der vorausgesetzten *Konvergenz* der Reihe $\sum a_\nu$ läßt sich zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ ein $m$ so fixieren, daß:

$$a_{\mu+1} + a_{\mu+2} + \cdots + a_{\mu+\varrho} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \varrho = 1, 2, 3, \cdots.$$

Setzt man hier $\varrho = \mu$ bzw. $\varrho = \mu + 1$ und beachtet, daß allgemein $a_{\nu+1} \leqq a_\nu$, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \mu \cdot a_{2\mu} &\leqq a_{\mu+1} + a_{\mu+2} + \cdots + a_{2\mu} \\ (\mu+1) \cdot a_{2\mu+1} &\leqq a_{\mu+1} + a_{\mu+2} + \cdots + a_{2\mu+1} \end{aligned}\right\} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für: } \mu \geqq m,$$

und daher:

$$\left.\begin{aligned} & 2\mu \cdot a_{2\mu} \\ (2\mu+1) a_{2\mu+1} < {} & (2\mu+2) \cdot a_{2\mu+1} \end{aligned}\right\} < \varepsilon \quad \text{für: } 2\mu \geqq 2m,$$

also allgemein:

$$\nu \cdot a_\nu < \varepsilon \quad \text{für: } \nu \geqq 2m,$$

d. h. in der Tat, wie behauptet:

$$\lim_{\nu\to\infty} \nu \cdot a_\nu = 0. \text{ —}$$

---

1) Dieselbe ist aber an sich noch *keine hinreichende* (Beispiel:

$$\lim_{\nu\to\infty} \nu \cdot \frac{1}{L_k(\nu)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \cdots),$$

während $\sum \frac{1}{L_k(\nu)}$ divergiert — s. § 48, S. 328, Gl. (14)). Über einen *besonderen* Fall, in welchem die Bedingung (5) sich als *hinreichend* für die Konvergenz erweist, s. § 85, Nr. 1, Fußn. 1.

Im übrigen hätte man diesen Satz, statt ihn in der vorstehenden sehr einfachen Weise direkt zu beweisen, auch unmittelbar aus einem früher gefundenen Ergebnisse allgemeinerer Art durch Spezialisierung herleiten können. In § 45, Nr. 4 wurde nämlich gezeigt, daß für *jede beliebige konvergente* Reihe $\sum a_\nu$ die Beziehung besteht[1]) (S. 310, Gl. (16)):

$$(6) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{M_1 a_1 + M_2 a_2 + \cdots + M_\nu a_\nu}{M_\nu} = 0,$$

wenn die $M_\nu > 0$ mit $\nu$ *niemals abnehmend* ins Unendliche wachsen.

Unter den besonderen über die $a_\nu$ gemachten Voraussetzungen steht es aber ohne weiteres frei, $M_\nu = \frac{1}{a_\nu}$ zu setzen, wodurch dann die Beziehung (6) sofort die Form

$$\lim_{\nu \to \infty} \nu \cdot a_\nu = 0$$

annimmt.

Zugleich ergibt sich aber im Anschlusse hieran die Möglichkeit, das in Gl. (5) enthaltene Resultat in folgender Weise zu verallgemeinern. Es bezeichne wieder $\sum \frac{1}{D_\nu}$ eine *divergente* Reihe mit positiven Gliedern und es werde außer der Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu$ vorausgesetzt, daß die Folge $D_\nu a_\nu$ *niemals zunehmend* mit unbegrenzt wachsendem $\nu$ gegen *Null* konvergiere. Da man infolgedessen $M_\nu = \frac{1}{D_\nu a_\nu}$ setzen kann, so liefert die Beziehung (6) auf diese Weise die folgende Verallgemeinerung des Satzes (III):

(IIIa) *Bedeutet $\sum a_\nu$ eine konvergente, $\sum \frac{1}{D_\nu}$ eine divergente Reihe mit positiven Gliedern und konvergiert die Folge $(D_\nu a_\nu)$ monoton gegen Null, so ist:*

$$(5\text{a}) \qquad \lim_{\nu \to \infty} D_\nu s_\nu a_\nu = 0, \quad \textit{wo:}\ s_\nu = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \cdots + \frac{1}{D_\nu}.$$

Die spezielle Wahl $D_\nu = 1$ liefert offenbar wieder die Bedingung (5). Setzt man ferner $D_\nu = \nu$ und beachtet, daß (vgl. § 34, S. 208, Gl. (13)):

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu} \cong \lg \nu,$$

so ergibt sich, daß für eine konvergente Reihe $\sum a_\nu$, welche der Be-

---

1) Mit der offenbar ohne weiteres erlaubten Weglassung des Anfangsgliedes $\frac{M_0 a_0}{M_\nu}$.

dingung genügt, $\nu a_\nu \geqq (\nu+1)\cdot a_{\nu+1}$ (woraus dann *eo ipso* folgt: $a_\nu > a_{\nu+1}$ und daher nach Gl. (5) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \nu a_\nu = 0$) die Beziehung besteht:

$$\lim_{\nu\to\infty} \nu \lg \nu \cdot a_\nu = 0. \tag{5b}$$

Da allgemein (s. § 51, Nr. 4, S. 348):

$$\sum_{m_k}^{\nu}{}_{\mu} \frac{1}{L_k(\mu)} \cong \lg_{k+1}(\nu) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

so findet man durch die analoge Schlußweise, daß:

$$\lim_{\nu\to\infty} L_{k+1}(\nu)\cdot a_\nu = 0, \tag{5c}$$

falls die Folge $L_k(\nu)\ a_\nu$ niemals zunimmt.[1])

4. Zeigen die letzten Bemerkungen, daß *unter gewissen Voraussetzungen* die Glieder $a_\nu$ einer *konvergenten* Reihe auch Bedingungen von der Form (5b), (5c) genügen, so ist doch ohne das Hinzutreten solcher spezieller Voraussetzungen *keine* derselben eine für die Konvergenz von $\sum a_\nu$ *notwendige.* Vielmehr besteht als Ergänzung zu dem Satze (III) der folgende Satz:

(IV) *Bedeutet $(M_\nu)$ eine mit $\nu$ beliebig langsam ins Unendliche wachsende Zahlenfolge, so gibt es stets konvergente Reihen $\sum a_\nu$ mit positiven monotonen Gliedern, für welche:*

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \nu\cdot M_\nu\cdot a_\nu = \infty, \tag{7}$$

*d. h. die Reihe enthält unendlich viele Glieder, welche infinitär größer sind, als die entsprechenden der* (bei geeigneter Wahl der $M_\nu$ relativ stark[2])) *divergenten Reihe* $\sum \frac{1}{\nu M_\nu}$.

Anders ausgesprochen: *Wie langsam auch die $M_\nu$ ins Unendliche wachsen mögen, so bildet die Beziehung:*

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \nu M_\nu a_\nu < \infty$$

*keine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe* $\sum a_\nu$.

---

1) Selbstverständlich hat man im Falle der *Konvergenz* von $\sum a_\nu$ auch allemal:

$$\lim_{\nu\to\infty} L_{k+1}(\nu)\cdot a_\nu = 0,$$

falls dieser Grenzwert *existiert,* und in jedem anderen Falle:

$$\underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, L_{k+1}(\nu)\cdot a_\nu = 0.$$

Vgl. § 47, S. 319, Fußn. 1.

2) Nämlich beliebig wenig schwächer als $\sum \frac{1}{\nu}$.

Beweis. Es bedeute $(m_\nu)$ eine mit $\nu$ monoton ins Unendliche wachsende Zahlenfolge, welche der Bedingung genügt $m_\nu \prec M_\nu$ (z. B. $m_\nu = \sqrt{M_\nu}$), ferner $\sum c_\nu$ eine *konvergente* Reihe mit *monoton abnehmenden* Gliedern und $p_0, p_1, \cdots, p_\lambda, \cdots$ eine unbegrenzte Folge wachsender natürlicher Zahlen (speziell $p_0 \geqq 1$) von der Beschaffenheit, daß:

$$\frac{1}{m_{p_0}} \leqq c_0, \quad \frac{1}{m_{p_1}} \leqq c_1, \quad \cdots, \quad \frac{1}{m_{p_\lambda}} \leqq c_\lambda, \quad \cdots$$

(was offenbar, wegen $\lim\limits_{\nu \to \infty} m_\nu = \infty$, stets möglich ist). Setzt man sodann:

$$\begin{array}{llll}
b_1 = b_2 & = \cdots = b_{p_0} & = \dfrac{1}{p_0 \cdot m_{p_0}} & \leqq \dfrac{c_0}{p_0} \\[2ex]
b_{p_0+1} = b_{p_0+2} & = \cdots = b_{p_1} & = \dfrac{1}{p_1 \cdot m_{p_1}} & \leqq \dfrac{c_1}{p_1} \\[2ex]
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\[2ex]
b_{p_{\lambda-1}+1} = b_{p_{\lambda-1}+2} & = \cdots = b_{p_\lambda} & = \dfrac{1}{p_\lambda \cdot m_{p_\lambda}} & \leqq \dfrac{c_\lambda}{p_\lambda} \\[2ex]
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;,
\end{array}$$

so wird:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{p_\lambda}$$

$$\leqq c_0 + \frac{p_1 - p_0}{p_1} c_1 + \cdots + \frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{p_\lambda} c_\lambda < c_0 + c_1 + \cdots + c_\lambda,$$

sodaß also $\sum\limits_0^\infty{}^\nu b_\nu$ *konvergiert*. Zugleich ergibt sich:

$$p_\lambda \cdot M_{p_\lambda} \cdot b_{p_\lambda} = \frac{M_{p_\lambda}}{m_{p_\lambda}},$$

also:

$$\lim_{\lambda \to \infty} p_\lambda \cdot M_{p_\lambda} \cdot b_{p_\lambda} = \infty,$$

d. h. schließlich:

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \, \nu \cdot M_\nu \cdot b_\nu = \infty.$$

Will man statt der Reihe $\dot{\sum} b_\nu$ mit *niemals zunehmenden, aber teilweise einander gleichen* Gliedern eine im übrigen sich analog verhaltende mit *durchweg abnehmenden* Gliedern $a_\nu$ herstellen, so setze man:

$$a_\nu = k_\nu b_\nu,$$

wo $(k_\nu)$ eine beliebige Folge positiver, monoton abnehmender Zahlen

mit nicht verschwindendem Grenzwert, etwa $\lim k_\nu = k > 0$ bedeutet $\left(\text{z. B. } k_\nu = k + \frac{1}{\nu},\ k_\nu = k \cdot e^{\frac{1}{\nu}}\right)$. Alsdann ist offenbar für *jedes* $\nu$:

$$a_\nu > a_{\nu+1},$$

außerdem $\sum a_\nu$ wiederum *konvergent* und:

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, \nu \cdot M_\nu \cdot a_\nu = k \cdot \overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, \nu \cdot M_\nu \cdot b_\nu = \infty.$$

5. Die vorstehende Deduktion beweist zwar die Existenz von Reihen $\sum a_\nu$ der fraglichen Art, sie liefert jedoch kein direktes Verfahren, um bestimmte Beispiele solcher $a_\nu$ in arithmetischen Zeichen anzuschreiben. Um ein solches zu gewinnen, geben wir für den in Rede stehenden Satz noch einen zweiten zwar etwas komplizierteren, aber in der bezeichneten Richtung vollkommneren Beweis.

Es bedeute $f(x)$ einen *arithmetischen Ausdruck* von folgenden Eigenschaften:

(A) Es soll $f(x)$ für jeden Zahlenwert $x$, der eine gewisse Zahl $x_0 \geqq 0$ erreicht oder übersteigt, eine *positive* Zahl $y$ vorstellen, die mit $x$ *monoton ins Unendliche* wächst und zwar in der Weise, daß:

$$f(x+1) - f(x) < 1, \quad f(\nu) \prec M_\nu. \tag{8}$$

(B) Die Gleichung:

$$y = f(x), \tag{9}$$

welche nach (A) zu jedem Werte $x > x_0$ einen *positiven*, mit $x$ *monoton zunehmenden* Wert $y > y_0$ (wo: $y_0 = f(x_0)$) liefert, soll auch *umgekehrt* zu jedem $y > y_0$ einen *positiven*, mit $y$ *monoton zunehmenden* Wert $x > x_0$ definieren[1]), welcher durch das Symbol:

$$x = \varphi(y) \quad \left(\text{sodaß also: (10a)} \quad \varphi(f(x)) = x = f(\varphi(x))\right) \tag{10}$$

bezeichnet werden möge.

Aus (8) und (9) folgt sodann:

$$f(x+1) < y + 1,$$

also mit Benützung von Gl. (10a):

$$\varphi(f(x+1)) < \varphi(y+1), \quad \text{d. h.} \quad x + 1 < \varphi(y+1),$$

und daher schließlich für $y \geqq y_0$:

$$\varphi(y+1) - \varphi(y) > 1. \tag{11}$$

---

1) Die Bedingung (B) läßt sich mit Hilfe von Begriffen, welche der *Funktionenlehre* angehören, kürzer in folgender Weise formulieren:

Es soll $f(x)$ für $x \geqq x_0$ eine eindeutige, *stetige* und monoton zunehmende, positive Funktion von $x$ bedeuten.

Bedeutet jetzt $\sum \frac{1}{C_\lambda}$ eine beliebig anzunehmende *konvergente* Reihe, deren Glieder der Bedingung genügen:

(12) $$C_\lambda - C_{\lambda-1} \geqq 1,$$

so hat man nach Ungl. (11) für hinlänglich große Werte von $\lambda$ auch:

(13) $$\varphi(C_\lambda) - \varphi(C_{\lambda-1}) > 1,$$

sodaß *zwischen* $\varphi(C_{\lambda-1})$ und $\varphi(C_\lambda)$ stets *mindestens eine ganze* Zahl liegen muß. Nun nehme man wiederum noch eine Folge *positiver*, mit wachsendem $\nu$ *monoton abnehmender* Zahlen $k_\nu$ *so* an, daß $\lim\limits_{\nu\to\infty} k_\nu = k$ *von Null verschieden*, und setze:

(14) $$a_\nu = \frac{k_\nu}{C_{\lambda-1}\cdot\varphi(C_\lambda)}$$

für alle ganzzahligen Werte $\nu$, welche durch die Bedingung definiert sind:

(15) $$\varphi(C_{\lambda-1}) \leqq \nu < \varphi(C_\lambda).$$

Alsdann nehmen offenbar die $a_\nu$ mit wachsendem $\nu$ *monoton ab.* Außerdem läßt sich zeigen, daß: $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, \nu\cdot M_\nu\cdot a_\nu = \infty$ und die Reihe $\sum a_\nu$ *konvergent* ist.

Bezeichnet man nämlich mit $p_\lambda$ die *größte ganze* Zahl, die *kleiner* als $\varphi(C_\lambda)$ ist, d. h. diejenige *ganze* Zahl, welche durch die Bedingungen definiert wird:

(16) $$\varphi(C_\lambda) - 1 \leqq p_\lambda < \varphi(C_\lambda),$$

so kann man zunächst die Ungleichungen (15) durch die folgenden ersetzen:

(17) $$p_{\lambda-1} < \nu \leqq p_\lambda$$

und man hat:

$$p_\lambda\ f(p_\lambda)\cdot a_{p_\lambda} = k_{p_\lambda}\cdot\frac{f(p_\lambda)}{C_{\lambda-1}}\cdot\frac{p_\lambda}{\varphi(C_\lambda)}$$

$$> k_{p_\lambda}\cdot\frac{f(\varphi(C_{\lambda-1}))}{C_{\lambda-1}}\cdot\frac{\varphi(C_\lambda)-1}{\varphi(C_\lambda)} \quad \begin{pmatrix}\text{wegen:}\\ p_\lambda \geqq \varphi(C_\lambda)-1 > \varphi(C_{\lambda-1})\end{pmatrix}$$

(18) $$= k_{p_\lambda}\cdot\frac{\varphi(C_\lambda)-1}{\varphi(C_\lambda)} \quad (\text{wegen: } f(\varphi(x)) = x),$$

also:

(19) $$\lim_{\lambda\to\infty} p_\lambda\cdot f(p_\lambda)\cdot a_{p_\lambda} \geqq k,$$

d. h.:

(20) $$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \nu\cdot f(\nu)\cdot a_\nu \geqq k,$$

und daher mit Berücksichtigung von Ungl. (8):

(21) $$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \nu\cdot M_\nu\cdot a_\nu = \infty.$$

Setzt man ferner:

$$\sum_{p_n+1}^{\infty} {}^{\nu} a_\nu = \sum_{n+1}^{\infty} {}^{\lambda} A_\lambda, \quad \text{wo: } A_\lambda = \sum_{p_{\lambda-1}+1}^{p_\lambda} {}^{\nu} a_\nu, \tag{22}$$

so wird:

$$A_\lambda = \sum_{p_{\lambda-1}+1}^{p_\lambda} {}^{\nu} \frac{k_\nu}{C_{\lambda-1}\cdot\varphi(C_\lambda)} < k_0 \cdot \frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{C_{\lambda-1}\cdot\varphi(C_\lambda)}$$

$$< \frac{k_0}{C_{\lambda-1}} \cdot \frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{p_\lambda} \text{ (wegen: } p_\lambda < \varphi(C_\lambda) \text{ nach (16))}$$

$$< \frac{k_0}{C_{\lambda-1}}, \tag{23}$$

woraus die *Konvergenz* der fraglichen Reihe unmittelbar hervorgeht.

Damit ist aber der ausgesprochene Satz vollständig bewiesen.

6. Will man jetzt Reihen $\sum a_\nu$ von der eben charakterisierten Beschaffenheit wirklich herstellen, so kann man etwa über $C_\lambda$ so verfügen, daß man setzt:

$$C_\lambda = \lambda^\varrho, \quad \text{wo } \varrho > 1,$$

also:

$$a_\nu = \frac{k_\nu}{(\lambda-1)^\varrho \cdot \varphi(\lambda^\varrho)} \tag{24}$$

für alle $\nu$, welche der Bedingung (15) genügen, d. h. für:

$$\varphi((\lambda-1)^\varrho) \leqq \nu < \varphi(\lambda^\varrho). \tag{25}$$

Mit Hilfe dieser Ungleichungen läßt sich sodann $\lambda$ auch explizite durch $\nu$ ausdrücken. Wegen: $f(\varphi(x)) = x$ folgt nämlich aus (25):

$$(\lambda-1)^\varrho \leqq f(\nu) < \lambda^\varrho,$$

und hieraus ergibt sich:

$$\lambda - 1 = [\sqrt[\varrho]{f(\nu)}], \tag{26}$$

also:

$$a_\nu = \frac{k_\nu}{[\sqrt[\varrho]{f(\nu)}]^\varrho \cdot \varphi([1+\sqrt[\varrho]{f(\nu)}]^\varrho)}. \tag{27}$$

Da aber offenbar:

$$[\sqrt[\varrho]{f(\nu)}] \cong \sqrt[\varrho]{f(\nu)}, \quad \text{und daher: } [\sqrt[\varrho]{f(\nu)}]^\varrho \cong f(\nu), \tag{28}$$

so kann man, ohne den Charakter der Reihe $\sum a_\nu$ zu verändern, das Glied (27) auch durch das folgende etwas einfachere ersetzen:

$$a_\nu = \frac{k_\nu}{f(\nu)\cdot\varphi([1+\sqrt[\varrho]{f(\nu)}]^\varrho)} \quad (\varrho > 1). \tag{29}$$

Ist dann z. B. $M_\nu = \lg \nu$ vorgelegt, so wähle man etwa: $f(x) = (\lg x)^{\frac{1}{\sigma}} = y$ (wo: $\sigma > 1$), also: $x = e^{y^\sigma} = \varphi(y)$; alsdann wird, wenn man noch $\varrho \cdot \sigma = \tau$ setzt:

$$(30) \qquad a_\nu = \frac{k_\nu}{\sqrt[\sigma]{\lg \nu} \cdot e^{[1+\sqrt[\tau]{\lg \nu}]^\tau}} \quad (\text{wo: } \tau > \sigma > 1).$$

Die Reihe $\sum a_\nu$ ist alsdann *konvergent*, obschon ihre monoton abnehmenden Glieder der Bedingung genügen:

$$(31) \qquad \overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, \nu \cdot \lg \nu \cdot a_\nu = \infty.$$

*Sie reagiert also auf keins der logarithmischen Konvergenzkriterien.*

7. Nach dem Satze (III), S. 367, bildet jede Zahlenfolge von der Form $\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)$, wo $\varepsilon$ eine *beliebig klein* anzunehmende positive Zahl bedeutet, eine *Schranke* für die *Konvergenz* in *dem* Sinne, daß die Glieder der monotonen Zahlenfolge $(a_\nu)$ von einer bestimmten Stelle ab jene Schranke *nicht* mehr erreichen dürfen, wenn $\sum a_\nu$ *konvergieren* soll. Ersetzt man dagegen $\varepsilon$ durch $\varepsilon_\nu$, wo $(\varepsilon_\nu)$ eine positive mit wachsendem $\nu$ *beliebig langsam* gegen Null abnehmende Zahlenfolge bedeutet, so gibt es nach Satz (IV), S. 369, unendlich viele *konvergente* Reihen $\sum a_\nu$, deren (monotone) Glieder die Schranke $\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\nu}\right)$ *unendlich oft übersteigen.*

Aus der bewiesenen *Existenz* der *Konvergenzschranke* $\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)$ folgt aber, wie schon aus der Bemerkung am Anfange von Nr. 3 hervorgeht, ohne weiteres die *Nicht-Existenz* einer *Divergenzschranke*. Denn bezeichnet $(b_\nu)$ *irgendeine* positive monotone Zahlenfolge, so gibt es nach Nr. 1 stets unendlich viele monotone Zahlenfolgen $(a_\nu)$, welche die *beiden* Schranken $\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)$ und $(b_\nu)$, wo $b_\nu < \frac{\varepsilon}{\nu}$, *unendlich oft durchsetzen*, sodaß $\sum a_\nu$ sicher *divergieren* muß. Da man hierbei für $(b_\nu)$ die Glieder einer *beliebig stark konvergierenden* Reihe $\sum \frac{1}{C_\nu}$ wählen und diese wiederum noch durch eine *wesentlich stärker* konvergierende ersetzen kann, so gilt also der Satz:

*Wie stark auch die Reihe $\sum \frac{1}{C_\nu}$ konvergieren möge, so gibt es stets divergente Reihen $\sum a_\nu$, unter deren (monotonen) Gliedern unbegrenzt viele infinitär kleiner sind als die entsprechenden der Reihe $\sum \frac{1}{C_\nu}$, d. h. man hat:*

$$(32) \qquad \underline{\lim_{\nu \to \infty}}\, C_\nu \cdot a_\nu = 0.$$

8. Wir können aber auch geradezu ein einfaches Verfahren angeben, um bei beliebig vorgeschriebenen $C_\nu$ solche *divergente* Reihen $\sum a_\nu$ wirklich herzustellen.

Man wähle einen arithmetischen Ausdruck $\varphi(x)$, der für alle reellen Zahlen $x > x_0$ *positiv* ausfällt und mit $x$ monoton und *so* ins Unendliche wächst, daß:

(33) $\varphi(\nu) \succ C_\nu$, also nach Satz (III), S. 367, *a fortiori*: $\varphi(x) \succ x$.

Ferner führe man die Bezeichnungen ein:

$$(34) \qquad \varphi_1(x) = \varphi(x), \quad \varphi_2(x) = \varphi(\varphi_1(x)), \quad \varphi_3(x) = \varphi(\varphi_2(x)), \cdot \\ \varphi_\lambda(x) = \varphi(\varphi_{\lambda-1}(x)), \cdots.$$

Bedeutet dann $b$ eine beliebige positive Zahl $> 1$, so läßt sich zunächst infolge der Beziehung (33) eine positive Zahl $a$ so fixieren, daß:

$$(35) \qquad \varphi_1(x) > b \cdot x \quad \text{für:} \quad x \geqq a.$$

Alsdann wird aber — immer für $x \geqq a$:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \varphi_1(\varphi_1(x)) &&> b \cdot \varphi_1(x) \\ \varphi_3(x) &= \varphi_1(\varphi_2(x)) &&> b \cdot \varphi_2(x) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (36) \qquad \varphi_\lambda(x) &= \varphi_1(\varphi_{\lambda-1}(x)) &&> b \cdot \varphi_{\lambda-1}(x) \quad \text{usf.} \end{aligned}$$

Die Glieder $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\lambda(x), \cdots$ bilden also eine unbegrenzte, monoton ins Unendliche wachsende, positive Zahlenfolge. Und zwar hat man für $x \geqq a$ und $\lambda = 2, 3, 4, \cdots$ nach Ungl. (36) und (35):

$$(37) \qquad \varphi_\lambda(x) - \varphi_{\lambda-1}(x) > (b-1) \cdot \varphi_{\lambda-1}(x) > (b-1) \cdot b \cdot x$$

und daher bei passender Wahl von $b$ und $a$ $\left(\text{z. B. für } b \geqq 2,\ a \geqq \frac{1}{2}\right)$ jedenfalls:

$$(38) \qquad \varphi_\lambda(a) - \varphi_{\lambda-1}(a) > 1 \quad (\lambda = 2, 3, 4, \cdots),$$

sodaß *zwischen* $\varphi_{\lambda-1}(a)$ und $\varphi_\lambda(a)$ stets *mindestens eine ganze* Zahl liegt.

Nimmt man jetzt wiederum noch eine Folge *positiver*, *monoton abnehmender* Zahlen $k_\nu$ mit dem *von Null verschiedenen* Grenzwerte $\lim_{\nu\to\infty} k_\nu = k$ an, so soll gesetzt werden:

$$(39) \qquad a_\nu = \frac{k_\nu}{\varphi_\lambda(a)}$$

für alle ganzzahligen $\nu$, welche durch die Bedingung definiert sind:

$$(40) \qquad \varphi_{\lambda-1}(a) - 1 \leqq \nu < \varphi_\lambda(a) - 1 \quad (\lambda = 2, 3, 4, \cdots).$$

Alsdann nehmen offenbar die $a_\nu$ mit wachsendem $\nu$ *monoton ab*, und es

läßt sich andererseits zeigen, daß $\lim\limits_{\nu\to\infty} C_\nu \cdot a_\nu = 0$ und die Reihe $\sum a_\nu$ *divergent* ist.

Bezeichnet man nämlich (analog wie in Nr. 5, Gl. (16)) mit $p_\lambda$ die *größte ganze* Zahl, die *kleiner* als $\varphi_\lambda(a)$ ist, sodaß also:

$$\varphi_\lambda(a) - 1 \leqq p_\lambda < \varphi_\lambda(a), \tag{41}$$

so läßt sich zunächst die Bedingung (40) durch die folgende ersetzen:

$$p_{\lambda-1} \leqq \nu < p_\lambda. \tag{42}$$

Infolgedessen wird:

$$a_{p_\lambda} = \frac{k_{p_\lambda}}{\varphi_{\lambda+1}(a)}$$

$$= \frac{k_{p_\lambda}}{\varphi(\varphi_\lambda(a))} < \frac{k_{p_\lambda}}{\varphi(p_\lambda)} \quad (\text{wegen: } p_\lambda < \varphi_\lambda(a)), \tag{43}$$

also:

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} \varphi(p_\lambda) \cdot a_{p_\lambda} \leqq k, \tag{44}$$

d. h.:

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} \varphi(\nu) \cdot a_\nu \leqq k, \tag{45}$$

und schließlich mit Berücksichtigung von Ungl. (33):

$$\lim_{\nu\to\infty} C_\nu \cdot a_\nu = 0. \tag{46}$$

Ferner hat man:

$$\sum_{p_1}^{\infty}{}_\nu\, a_\nu = \sum_{2}^{\infty}{}_\lambda\, A_\lambda, \quad \text{wenn: } A_\lambda = \sum_{p_{\lambda-1}}^{p_\lambda - 1}{}_\nu\, a_\nu \quad \text{gesetzt wird.} \tag{47}$$

Da sodann:

$$A_\lambda = \sum_{p_{\lambda-1}}^{p_\lambda-1}{}_\nu \frac{k_\nu}{\varphi_\lambda(a)} > k \cdot \frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{\varphi_\lambda(a)} = k \cdot \frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{p_\lambda} \cdot \frac{p_\lambda}{\varphi_\lambda(a)}, \tag{48}$$

so ergibt sich sofort die *Divergenz* der fraglichen Reihe, da (nach Gl. (11 b), S. 327) $\frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{p_\lambda}$ das allgemeine Glied einer *divergenten* Reihe bildet und $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{p_\lambda}{\varphi_\lambda(a)} = 1$ ist (s. Ungl. (41)).

Beispiel. Es sei: $C_\nu = \nu^\varrho$, wo $\varrho > 1$. Man kann also setzen:

$$\varphi(x) = x^\sigma, \quad \text{wo} \quad \sigma > \varrho.$$

Alsdann wird:

$$\varphi_2(x) = (x^\sigma)^\sigma = x^{\sigma^2}, \; \cdots, \; \varphi_\lambda(x) = x^{\sigma^\lambda}.$$

Nimmt man der Einfachheit halber die oben mit $a$ bezeichnete Zahl auch $= \sigma$ (was z. B. sicher gestattet ist, wenn $\sigma \geqq 2$, da alsdann:

$$\varphi_\lambda(\sigma) - \varphi_{\lambda-1}(\sigma) = \sigma^{\sigma^\lambda} - \sigma^{\sigma^{\lambda-1}} \geqq 2^{2^\lambda} - 2^{2^{\lambda-1}} > 1),$$

so wird nach (39), (40):

$$a_\nu = \frac{k_\nu}{\sigma^{\sigma^\lambda}}, \quad \text{falls: } \sigma^{\sigma^{\lambda-1}} - 1 \leqq \nu < \sigma^{\sigma^\lambda} - 1. \tag{49}$$

Um auch hier wiederum $\lambda$ explizite durch $\nu$ auszudrücken, hat man:

$$\sigma^{\lambda-1} \leqq \overset{\sigma}{\log}(\nu+1) < \sigma^\lambda$$

$$\lambda - 1 \leqq \overset{\sigma}{\log}_2(\nu+1) < \lambda,$$

d. h.:

$$\lambda - 1 = [\overset{\sigma}{\log}_2(\nu+1)] \tag{50}$$

und daher:

$$a_\nu = \frac{k_\nu}{\sigma^{\sigma^{1+[\overset{\sigma}{\log}_2(\nu+1)]}}} \quad (\sigma > \varrho > 1). \tag{51}$$

Die Reihe $\sum a_\nu$ *divergiert*, obschon ihre monoton abnehmenden Glieder der Bedingung genügen:

$$\lim_{\nu \to \infty} \nu^\varrho \cdot a_\nu = 0. \tag{52}$$

Sie reagiert also auf *keins* der logarithmischen *Divergenz*kriterien.

## § 54. Die Kriterien zweiter Art.

1. Als allgemeine Form für die Kriterien *zweiter* Art ergab sich (s. § 47, S. 321, Formel (12)):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \left( D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1} \right) < 0: & \textit{Divergenz}, \\ \underline{\lim_{\nu \to \infty}} \left( C_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1} \right) > 0: & \textit{Konvergenz}, \end{array} \right. \tag{1}$$

und man hätte jetzt nur noch für $D_\nu$ bzw. $C_\nu$ irgendeinen der oben aufgestellten typischen Ausdrücke einzusetzen, um die fertigen Kriterien herzustellen. Dabei ergibt sich nun aber für das *Konvergenz*kriterium die Möglichkeit einer sehr merkwürdigen und zugleich zweckmäßigen Umformung, durch welche die linke Seite des *Konvergenz*kriteriums *identisch* mit derjenigen des *Divergenz*kriteriums wird: an die Stelle des Kriterien*paares* (1) tritt dann also ein *einziges disjunktives* Kriterium.

Für die *Konvergenz* von $\sum a_\nu$ erwies sich als *hinreichend* (§ 47, S. 321, Formel (11)), wenn von einer bestimmten Stelle ab, etwa für $\nu \geqq n$, die Beziehung besteht:

$$C_\nu \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1} \geqq 0. \tag{2}$$

Substituiert man hier nach § 49, S. 341, Gl. (6):

$$C_\nu = \frac{M_\nu \cdot M_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}}, \quad \text{also.} \quad C_{\nu+1} = \frac{M_{\nu+1} \cdot M_\nu}{M_{\nu+1} - M} = M_\nu\left(1 + \frac{M_\nu}{M_{\nu+1} - M_\nu}\right),$$

so ergibt sich nach Weglassung des gemeinsamen Faktors $M_\nu$ und Multiplikation mit einer willkürlich anzunehmenden *positiven* Zahl $\varrho$:

$$\varrho \cdot \frac{M_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - \varrho \cdot \frac{M_\nu}{M_{\nu+1} - M_\nu} \geqq \varrho. \tag{3}$$

Nun stellt aber ein Ausdruck von der Form: $\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}}$ stets das allgemeine Glied einer *divergenten* Reihe dar, und umgekehrt läßt sich das allgemeine Glied $D_\nu^{-1}$ *jeder* divergenten Reihe nach § 48, S. 329, Gl. (16) in die Form setzen:

$$D_\nu^{-1} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}}.$$

Da im übrigen die Zahl $\varrho$ hierbei gar keiner anderen Beschränkung unterworfen ist, als der, *positiv*, also $> 0$ zu sein, so läßt sich die Konvergenzbedingung (3) jetzt ohne weiteres durch die folgende ersetzen:

$$D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1} > 0 \quad (\text{für } \nu \geqq n), \tag{4}$$

und diese letztere Bedingung wird wiederum von einer bestimmten Stelle $\nu \geqq n$ ab mit Sicherheit erfüllt sein, wenn:

$$\varliminf_{\nu \to \infty} \left(D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1}\right) > 0. \tag{5}$$

Damit ist aber die oben angekündigte Umformung des *Konvergenzkriteriums* in der Tat vollzogen.

2. Durch Kombination der Konvergenzbedingung (5) mit den in (1) enthaltenen ergibt sich, wenn man wiederum beachtet, daß *jede beliebige positive Zahlenfolge* $(B_\nu)$ entweder der Klasse der Zahlenfolgen $(D_\nu)$ oder derjenigen der $(C_\nu)$ angehören muß, das folgende *Konvergenzkriterium zweiter Art* von besonderer Allgemeinheit:

(J) $$\lim_{\nu\to\infty}\left(B_\nu\cdot\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}-B_{\nu+1}\right)>0:\ \textit{Konvergenz.}$$[1]

Dasselbe rührt in der Hauptsache von Kummer her und bildet das Analogon zu den in § 50 abgeleiteten allgemeinsten *Kriterien erster Art* (G) und (H) (S. 344).

Es kam hier vor allem darauf an, den *Zusammenhang* dieses wegen der großen *Willkürlichkeit* der Zahlen $B_\nu$ doch äußerst merkwürdigen Kriteriums mit der früher gefundenen *Grundform* der Konvergenzkriterien (Ungl. (1)) vollständig aufzuklären, d. h. den wahren Grund dafür anzugeben, warum man die im *Konvergenz*kriterium (1) naturgemäß auftretenden Zahlen $C_\nu$ schließlich durch *ganz beliebige positive* Zahlen $B_\nu$ ersetzen darf. Will man auf die Feststellung dieses Zusammenhanges verzichten, so läßt sich die Richtigkeit des Kriteriums (J) *a posteriori* einfacher auf folgende Art beweisen.

Angenommen, es bestehe die Ungleichung (J), so muß schon für alle Werte $\nu$ von einem bestimmten Werte $\nu = m$ ab eine Beziehung von der Form stattfinden:

$$B_\nu\cdot\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}-B_{\nu+1}\geqq\varrho>0,$$

und es wird somit:

(6) $$B_\nu\cdot a_{\nu+p}-B_{\nu+1}\cdot a_{\nu+p+1}\geqq\varrho\cdot a_{\nu+p+1}\quad\text{für: }\nu\geqq m.$$

Da hiernach die links stehende Differenz stets *positiv* ausfällt, so nehmen die positiven Zahlen $B_\nu\cdot a_{\nu+p}$ mit wachsenden Werten von $\nu$ *monoton ab*, und man kann daher setzen:

(7) $$\lim_{\nu\to\infty}B_\nu\cdot a_{\nu+p}=\alpha,$$

wo $\alpha$ eine *bestimmte Zahl* $\geqq 0$ bedeutet.[2]) Substituiert man jetzt in

---

1) Man kann diesem Kriterium (analog wie *jedem* Konvergenz- oder Divergenzkriterium zweiter Art — vgl. § 47, S. 321, Fußnote 1) auch die Form geben:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(B_\nu-B_{\nu+1}\cdot\frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}}\right)>0:\ \textit{Konvergenz.}$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung wird am einfachsten erkannt, wenn man aus der obigen Ungleichung diejenigen Beziehungen ableitet, welche den im Text mit (6)—(9) bezeichneten entsprechen.

2) Man bemerke, daß Gl. (7) *keineswegs* die Existenz eines *bestimmten positiven Grenzwertes* von $\left(B_\nu\cdot\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}-B_{\nu+1}\right)$ bei $\nu\to\infty$ erheischt. Es genügt schon, wenn dieser Ausdruck stets über einer positiven Zahl bleibt, d. h. wenn sein *unterer Limes positiv* ausfällt.

Ungl. (6) der Reihe nach $\nu = m, m+1, \cdots, (n-1)$, so folgt durch Addition der betreffenden Ungleichungen:

(8)
$$\varrho \cdot \sum_{m+1}^{n} a_{\nu+p} \leqq B_m \cdot a_{m+p} - B_n \cdot a_{n+p},$$

und hieraus für $n \to \infty$:

(9)
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{m+p+1}^{n} a_\nu \leqq \frac{1}{\varrho}(B_m \cdot a_{m+p} - \alpha),$$

sodaß also $\sum a_\nu$ in der Tat als *konvergent* erkannt wird. —

An die aus Ungl. (J) allemal resultierende Existenz der Gleichung (7) knüpfen wir noch die folgende Bemerkung. Nimmt man für $B_\nu$ eine Zahl vom Charakter $D_\nu$, so muß offenbar allemal $\alpha = 0$ sein; denn die Beziehung: $\lim\limits_{\nu\to\infty} D_\nu \cdot a_{\nu+p} = \alpha > 0$ kann ja nur bestehen, wenn $\sum a_\nu$ *divergiert.* Somit ergibt sich:

*Genügen die Zahlen $a_\nu$ der Konvergenzbedingung:*

(10)
$$\underline{\lim_{\nu\to\infty}}\left(D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1}\right) > 0,$$

*so hat man stets:*

(11)
$$\lim_{\nu\to\infty} D_\nu \cdot a_{\nu+p} = 0.$$ [1]

Dagegen kann $\alpha$ *von Null verschieden* ausfallen, wenn für $B_\nu$ eine Zahl vom Charakter $C_\nu$ gewählt wird. (Beispiel: $a_{\nu+p} = \frac{1}{\nu^2}$, $C_\nu = \nu\cdot(\nu+1)$. Alsdann wird: $C_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1} = \nu(\nu+1)\cdot\frac{(\nu+1)^2}{\nu^2} - (\nu+1)\cdot(\nu+2) = \frac{\nu+1}{\nu}$, also: $\lim\limits_{\nu\to\infty} C_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1} = 1$, und andererseits: $\lim\limits_{\nu\to\infty} C_\nu \cdot a_{\nu+p} = 1$).

3. Verbindet man jetzt ferner das *Konvergenz*kriterium (5) mit dem *Divergenz*kriterium (1), so ergibt sich das folgende *disjunktive Kriterium zweiter Art:*

($K_1$)
$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\left(D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1}\right) \begin{cases} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

Die Auswahl der positiven Zahlen $D_\nu$ unterliegt dabei lediglich der Beschränkung, daß $\sum D_\nu^{-1}$ *divergieren* muß. Auch ist wiederum ohne

1) Dieses Resultat bildet das Analogon und die Ergänzung zu dem in § 47, Nr. 3 (S. 322, Gl. (12a)—(15)) abgeleiteten.

weiteres einleuchtend, daß man, von einem irgendwie fixierten $D_\nu$ ausgehend, ein *wirksameres Divergenz*kriterium erhält, wenn man für $D_\nu$ das reziprok genommene Glied $D_\nu'$ einer *passend gewählten, schwächer* divergierenden Reihe substituiert (nämlich einer solchen, bei der nicht allein $D_\nu' \succ D_\nu$, sondern auch; zum mindesten für jedes *endliche* $\nu \geqq n$: $\frac{D'_{\nu+1}}{D'_\nu} > \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$). Sodann läßt sich aber zeigen, daß durch eine derartige Substitution, auch das betreffende *Konvergenz*kriterium eine Verschärfung erfährt.

Geht man nämlich auf die *Konvergenz*kriterien in ihrer *ursprünglichen* Form (1) zurück, so ist zunächst evident, daß dieselben um so *wirksamer* ausfallen, je *schwächer* die benützte Vergleichsreihe $\sum C_\nu^{-1}$ *konvergiert.* Drückt man hierauf, wie in Nr. 1 gelehrt wurde, die $C_\nu$ durch die zugehörigen $M_\nu$ bzw. $D_\nu$ aus, so entsprechen nach § 49, Nr. 2 (S. 332) den *schwächer konvergierenden* Reihen $\sum C_\nu^{-1}$ auch *langsamer zunehmende* Zahlen $M_\nu$. Da aber diese letzteren auch wiederum solche $D_\nu$ erzeugen, welche *schwächer divergierenden* Reihen angehören — *vice versa* — so folgt schließlich, daß die Einführung solcher $D_\nu$ in die linke Seite der Formel ($K_1$) auch eine Verbesserung des betreffenden *Konvergenz*kriteriums bewirken muß.

Um zunächst ein Anfangskriterium zu gewinnen, setzen wir in ($K_1$):

$$D_\nu = \frac{1}{M_\nu - M_{\nu-1}} \tag{12}$$

und unterwerfen dabei die $M_\nu$ der Beschränkung:

$$M_\nu \cong M_{\nu-1} \tag{13}$$

(die wiederum nur ein Ausschließen relativ unwirksamer Kriterien bedeutet).[1] Führt man sodann im Anschlusse an § 48, S. 328, Gl. (13) statt $D_\nu$ der Reihe nach Ausdrücke von folgender Form ein:

$$\Delta_\nu^{(k)} = \frac{L_k(M_\nu)}{M_\nu - M_{\nu-1}} = L_k(M_\nu) \cdot D_\nu \quad (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{14}$$

---

1) Hierzu ist *hinreichend* (aber *nicht notwendig*), daß:

$$D_\nu \cong D_{\nu-1},$$

eine Bedingung, die bei den üblichen Kriterienskalen (s. Nr. 6) allemal erfüllt ist. Denn man hat:

$$\frac{D_\nu}{D_{\nu-1}} = \frac{M_{\nu-1} - M_{\nu-2}}{M_\nu - M_{\nu-1}}$$

und daher, wenn man in dem Grenzwertsatze § 37, S. 230, Gl. (13) $a_\nu = M_{\nu-1}$

und setzt zur Abkürzung:

$$\lambda_\nu^{(k)} = L_k(M_\nu) \cdot D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - L_k(M_{\nu+1}) \cdot D_{\nu+1}, \tag{15}$$

so ergibt sich die *Kriterienskala*:

$$\overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(k)} \begin{cases} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Konvergenz}, \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{K$_2$}$$

zur *Fortsetzung* bzw. *Verschärfung* des Anfangskriteriums ($K_1$).

4. Die Kriterien ($K_2$) gestatten noch eine gewisse Umformung, welche die beim Übergange von ($K_1$) zum *ersten* Kriterium ($K_2$) oder von irgendeinem Kriterium dieser Skala zum *nächstfolgenden* zu erzielende *Art der Verschärfung* deutlicher erkennen läßt.

Bezeichnet man den zur Bildung des Kriteriums ($K_1$) dienenden Ausdruck mit $l_\nu$, sodaß also:

$$l_\nu = D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1}, \tag{16}$$

und vergleicht damit den aus Gl. (15) für $k = 0$ resultierenden, nämlich:

$$\lambda_\nu^{(0)} = M_\nu \cdot D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - M_{\nu+1} \cdot D_{\nu+1}, \tag{17}$$

so folgt, wenn man Gl. (16) mit $M_\nu$ multipliziert und von (17) subtrahiert:

$$\lambda_\nu^{(0)} - M_\nu l_\nu = -(M_{\nu+1} - M_\nu) \cdot D_{\nu+1} = -1 \quad \left(\text{wegen: } D_{\nu+1} = \frac{1}{M_{\nu+1} - M_\nu}\right),$$

also:

$$\lambda_\nu^{(0)} = -1 + M_\nu l_\nu. \tag{18}$$

Darnach wird aber:

$$\underline{\lim}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(0)} = -1 + \underline{\lim}_{\nu \to \infty} M_\nu l_\nu, \quad \overline{\lim}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(0)} = -1 + \overline{\lim}_{\nu \to \infty} M_\nu l_\nu,$$

oder in eine einzige Beziehung vereinigt:

$$\overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(0)} = -1 + \overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} M_\nu l_\nu, \tag{19}$$

wobei das Symbol $\overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty}$ so zu verstehen ist, daß auf *beiden* Seiten der Gleichung entweder $\underline{\lim}_{\nu \to \infty}$ oder $\overline{\lim}_{\nu \to \infty}$ zu nehmen ist.

---

substituiert:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{M_{\nu-1}}{M_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{D_\nu}{D_{\nu-1}},$$

falls der rechts stehende Grenzwert existiert.

Zur Ableitung des analogen Resultates für $\lambda_\nu^{(k+1)}$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ hat man nach (15):

$$\lambda_\nu^{(k)} = L_k(M_\nu) \cdot D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - L_k(M_{\nu+1}) \cdot D_{\nu+1}$$

$$\lambda_\nu^{(k+1)} = L_{k+1}(M_\nu) \cdot D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - L_{k+1}(M_{\nu+1}) \cdot D_{\nu+1},$$

und daher, wenn man die erste dieser Gleichungen mit $\lg_{k+1} M_\nu$ multipliziert und von der zweiten subtrahiert, zunächst:

$$\begin{aligned}(20)\qquad \lambda_\nu^{(k+1)} - \lg_{k+1} M_\nu \cdot \lambda_\nu^{(k)} &= \\ -(\lg_{k+1} M_{\nu+1} - \lg_{k+1} M_\nu) \cdot L_k(M_{\nu+1}) \cdot D_{\nu+1}&.\end{aligned}$$

Da aber infolge der Bedingung $M_\nu \cong M_{\nu+1}$ (Gl. (13)):

$$\lg_{k+1} M_{\nu+1} - \lg_{k+1} M_\nu \cong \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_k(M_{\nu+1})} = \frac{1}{L_k(M_{\nu+1}) \cdot D_{\nu+1}}$$

(§ 38, Gl. (34)), so folgt aus (20), daß:

$$(21)\qquad \overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, \lambda_\nu^{(k+1)} = -1 + \overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, \lg_{k+1} M_\nu \cdot \lambda_\nu^{(k)}.$$

Mit Benützung der Relationen (19), (21) lassen sich also die Kriterien der Skala ($K_2$) auch auf die folgende Form bringen:

$$(\mathrm{L})\quad \left\{\begin{array}{lll} (1) & \overline{\lim\limits_{\nu \to \infty}}\, M_\nu \cdot l_\nu \begin{cases} < 1: & \textit{Divergenz}, \\ > 1: & \textit{Konvergenz}, \end{cases} & \\ (2) & \overline{\lim\limits_{\nu \to \infty}}\, \lg_{k+1} M_\nu \cdot \lambda_\nu^{(k)} \begin{cases} < 1: & \textit{Divergenz}, \\ > 1: & \textit{Konvergenz}, \end{cases} & (k=0, 1, 2, \cdots), \end{array}\right.$$

wobei also die $l_\nu$, $\lambda_\nu^{(k)}$ durch Gl. (16), (15) definiert sind.

5. Über die Stellung des Kriteriums ($K_1$) zu dem ersten Kriterium der Skala ($K_2$) oder (L), sowie über diejenige irgendeines Kriteriums der Skala ($K_2$) oder (L) zum nächstfolgenden läßt sich auf Grund der Beziehungen (19) und (21) jetzt folgendes aussagen:

Liefert das Fundamentalkriterium ($K_1$) eine *Entscheidung*, d. h. ist $\lim l_\nu$ *von Null verschieden* oder sind $\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, l_\nu$ und $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, l_\nu$ *beide von Null verschieden* und *mit gleichem Vorzeichen* versehen, so wird nach Gl. (19) $\lim \lambda_\nu^{(0)}$ *unendlich groß* mit dem *Vorzeichen von* $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, l_\nu$, gibt somit *dieselbe Entscheidung* gleichsam *in vergrößertem Maßstabe.*

Wenn dagegen das Kriterium ($K_1$) *versagt*, so ergeben sich *folgende Möglichkeiten:*

1) Es sind $\underline{\lim}_{\nu \to \infty} l_\nu$ und $\overline{\lim}_{\nu \to \infty} l_\nu$ *beide von Null verschieden* und *mit verschiedenen Vorzeichen* versehen. Alsdann folgt aus Gl. (19), daß: $\underline{\lim}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(0)} = -\infty$, $\overline{\lim}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(0)} = +\infty$, d. h. es *versagt* auch das auf $\lambda_\nu^{(0)}$ bezügliche Kriterium in analoger Weise (nämlich wiederum noch in vergrößertem Maßstabe).

2) Es ist: $\lim_{\nu \to \infty} l_\nu = 0$, bzw. *einer* der beiden Hauptlimites $\overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} l_\nu = 0$. Alsdann *kann* offenbar, wie Gl. (19) lehrt, $\overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(0)}$ sehr wohl unzweideutig $< 0$ bzw. $> 0$ ausfallen und somit eine *Entscheidung* liefern: das betreffende Kriterium stellt also eine wirkliche *Verbesserung* von ($K_1$) dar. Ein *Versagen* des auf $\lambda_\nu^{(0)}$ bezüglichen Kriteriums kann dann wiederum nur in folgenden zwei Fällen stattfinden:

a) Es ist: $\underline{\lim}_{\nu \to \infty} M_\nu l_\nu < 1 < \overline{\lim}_{\nu \to \infty} M_\nu l_\nu$, also: $\underline{\lim}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(0)} < 0$, $\overline{\lim}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(0)} > 0$, d. h. das Kriterium $\overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(0)}$ versagt genau in derselben Weise, wie das Kriterium $\overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} l_\nu$ im Falle 1).

b) Es ist: $\lim_{\nu \to \infty} M_\nu l_\nu = 1$, bzw. *einer* der beiden Hauptlimites $\overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} M_\nu l_\nu = 1$. Alsdann wird: $\lim_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(0)} = 0$, bzw. *einer* der beiden Hauptlimites $\overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(0)} = 0$, d. h. das Kriterium $\overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(0)}$ versagt genau in derselben Weise, wie das Kriterium $\overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} l_\nu$ im Falle 2).

Nun lehrt Gl. (21), daß beim Übergange von dem auf $\lambda_\nu^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \cdots$) bezüglichen Kriterium zu dem nächstfolgenden (d. h. auf $\lambda_\nu^{(k+1)}$ bezüglichen) genau *dieselben Eventualitäten* eintreten, wie beim Übergange von $l_\nu$ zu $\lambda_\nu^{(0)}$. Daraus ergibt sich also insbesondere, daß im Falle (2a) das nächstfolgende Kriterium $\overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(1)}$ sicher *versagt*; daß dagegen im Falle (2b) dieses Kriterium eine *Entscheidung* liefert, sofern nicht für $\overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(1)}$ diejenigen Eventualitäten eintreten, die den Fällen (2a), (2b) entsprechen. So fortschließend gelangt man also zu den folgenden Ergebnissen:

I. Wenn das Kriterium ($K_1$) oder *irgendein* Kriterium der Skala ($K_2$) eine *Entscheidung* liefert, so gilt das *gleiche* von *jedem folgenden* Kriterium.

II. *Versagt* das Kriterium ($K_1$) oder *irgendein* Kriterium von ($K_2$) in *der* Weise, daß die betreffenden *Hauptlimites verschiedene* Vorzeichen besitzen; bzw. versagt *irgendein* Kriterium von (L) *so*, daß der *untere*

*Limes* $<1$, der *obere* $>1$ ausfällt: so *versagt* auch *jedes folgende* Kriterium.

III. *Versagt* das Kriterium $(\mathrm{K}_1)$ oder *irgendein* Kriterium von $(\mathrm{K}_2)$ in *der* Weise, daß die *Null* als *Limes* oder als *einer der Hauptlimites* auftritt; bzw. versagt *irgendein* Kriterium von (L) in *der* Weise, daß der betreffende *Limes* oder *einer der Hauptlimites* $=1$ wird: so liefert das folgende Kriterium eine *Entscheidung*, sofern nicht auch für dieses wiederum einer der Fälle II, III eintritt.

6. Die spezielle Wahl: $M_\nu = \nu$, also: $D_\nu = 1$, gibt wieder *die zumeist gebräuchlichen Kriterien zweiter Art.* Aus $(\mathrm{K}_1)$, $(\mathrm{K}_2)$ resultiert auf diese Weise:

$$(\mathrm{K}_1') \qquad \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty}\left(\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}-1\right)\begin{cases}<0: & \textit{Divergenz},\\ >0: & \textit{Konvergenz}.\end{cases}$$

$$(\mathrm{K}_2') \quad \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty}\left(L_k(\nu)\cdot\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}-L_k(\nu+1)\right)\begin{cases}<0: & \textit{Divergenz},\\ >0: & \textit{Konvergenz}.\end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots).$$

Entsprechend ergibt sich aus der mit $(\mathrm{K}_1)$ gleichwertigen Kriterienskala (L) — wenn man der Vollständigkeit halber wiederum noch das Kriterium $(\mathrm{K}_1')$ in entsprechender Umformung an die Spitze stellt:

$$(\mathrm{K}_1'') \qquad \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty}\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\begin{cases}<1: & \textit{Divergenz},\\ >1: & \textit{Konvergenz}.\end{cases}$$

$$(\mathrm{L}')\begin{cases}(1) & \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty}\nu\cdot\left(\dfrac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}-1\right)\begin{cases}<1: & \textit{Divergenz},\\ >1: & \textit{Konvergenz}.\end{cases}\\[2ex] (2) & \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty}\lg_{k+1}\nu\cdot\left(L_k(\nu)\cdot\dfrac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}-L_k(\nu+1)\right)\begin{cases}<1: & \textit{Divergenz},\\ >1: & \textit{Konvergenz}.\end{cases}\\ & (k=0,1,2,\cdots).\end{cases}$$

Das Kriterium $(\mathrm{K}_1')$ bzw. $(\mathrm{K}_1'')$ ist das *Cauchysche Fundamentalkriterium zweiter Art.*[1])

Das erste Kriterium der Skala $(\mathrm{K}_2')$ bzw. das Kriterium $(\mathrm{L}', 1)$ wird gewöhnlich als das Raabesche bezeichnet, während die übrige Skala $(\mathrm{K}_2')$ — abgesehen von einem unwesentlichen Unterschiede in der Formulierung — von Bertrand herrührt.

---

1) Man findet es gewöhnlich in der Form:

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\begin{cases}>1: & \textit{Divergenz},\\ <1: & \textit{Konvergenz},\end{cases}$$

und unter der unnötig einschränkenden Voraussetzung, daß der fragliche *Limes* überhaupt *existiert*.

Aus der oben angestellten Untersuchung über den Wert der allgemeinen Kriterienskala $(K_1)$, $(K_2)$ bzw. $(L)$ ergibt sich für die praktische Anwendung der vorstehenden Kriterien die folgende Regel.

Sind der *obere* und *untere Limes* von $\left(\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - 1\right)$ d. h. von $\left(\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - 1\right)$ *von Null verschieden* und mit *entgegengesetztem Vorzeichen* behaftet, liegt also der Quotient $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$, wie groß auch $\nu$ angenommen werde, um mehr als eine gewisse positive Zahl teils *oberhalb*, teils *unterhalb* der *Einheit*, so *versagt* nicht bloß das Cauchysche Fundamentalkriterium, sondern *alle* Kriterien der Skala $(K_2')$ bzw. $(L')$. Die Anwendung der letzteren kommt also *überhaupt nur* in Frage, wenn $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ oder *einer* der *Hauptlimites* $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ den Wert 1 hat.

Zur Prüfung der Reihe $\sum a_\nu$ dient dann zunächst das Raabesche Kriterium $(L', 1)$. *Versagt* dasselbe in *der* Weise, daß der betreffende *untere Limes* $< 1$, der *obere* $> 1$ ausfällt, so *versagen* auch *alle* folgenden Kriterien. Erscheint dagegen als *Limes* bzw. als *einer der Hauptlimites* der Wert 1, so hat man das *erste* Kriterium von $(L', 2)$ zu Rate zu ziehen, also:

$$(L', 2_1) \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \lg\nu \cdot \left(\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - (\nu+1)\right) \begin{cases} < 1: & \textit{Divergenz,} \\ > 1: & \textit{Konvergenz.} \end{cases}$$

Es ist klar, in welcher Weise diese Betrachtungen fortzusetzen sind, falls auch dieses *letztere* Kriterium *versagen* sollte. *Wesentlich* ist hierbei die Erkenntnis, daß die weitere Fortsetzung des Verfahrens *resultatlos* bleiben muß und daher *aufzugeben* ist, wenn für *irgendeinen* der zu prüfenden Ausdrücke: $\lg_{k+1}\nu \left(L_k(\nu) \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - L_k(\nu+1)\right)$ der *untere Limes* $< 1$, der *obere* $> 1$ ausfällt.

## § 55. Anwendung der Kriterien zweiter Art zur Ableitung der Gaußschen Kriterien und deren Verallgemeinerung.

1. Die Beziehungen $(K_1'')$, $(L', 1)$, $(L', 2)$ erweisen sich für die Konvergenzuntersuchung vieler in der Funktionenlehre häufig vorkommender Reihen als völlig ausreichend und können u. a. mit Vorteil dazu benützt werden, um diejenigen, für gewisse Anwendungen sehr bequemen Kriterien zu gewinnen, welche Gauß gelegentlich seiner Untersuchung über

die *hypergeometrische Reihe* auf umständlicherem Wege abgeleitet hat. Dieselben beziehen sich auf solche Reihen, bei denen der Quotient $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ sich in die Form setzen läßt:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = \frac{A \cdot \nu^m + A_1 \nu^{m-1} + A_2 \nu^{m-2} + \cdots + A_m}{\nu^m + B_1 \nu^{m-1} + B_2 \nu^{m-2} + \cdots + B_m}, \tag{1}$$

wo $m$ eine *ganze positive*, $A$ eine *beliebige positive* Zahl bedeutet, während $A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots$ beliebige positive oder negative Zahlen einschließlich der *Null* vorstellen.[1])

Schreibt man Gl. (1) zunächst folgendermaßen:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = \frac{A \nu^2 + A_1 \nu + P_\nu}{\nu^2 + B_1 \nu + Q_\nu} = \frac{A + A_1 \nu^{-1} + P_\nu \nu^{-2}}{1 + B_1 \nu^{-1} + Q_\nu \nu^{-2}}, \tag{2}$$ [2])

wo also:

$$\left\{\begin{array}{lll} P_\nu = A_2 + A_3 \nu^{-1} + \cdots + A_m \nu^{-(m-2)} & \text{und daher:} & \lim\limits_{\nu \to \infty} P_\nu = A_2, \\ Q_\nu = B_2 + B_3 \nu^{-1} + \cdots + B_m \nu^{-(m-2)} & \text{„} \quad \text{„} & \lim\limits_{\nu \to \infty} Q_\nu = B_2, \end{array}\right. \tag{3}$$

so folgt zunächst:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = A > 0, \tag{4}$$

und hieraus erkennt man, daß der Quotient $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ schon *von einer bestimmten Stelle ab positiv* ausfallen muß, die $a_\nu$ also *gleiches Vorzeichen* besitzen. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_\nu > 0$ annehmen etwa für $\nu \geqq n$. Nach Gl. (4) hat man sodann:

$$\left\{\begin{array}{ll} \textit{Divergenz}, \text{ wenn:} & A < 1, \\ \textit{Konvergenz}, \text{ wenn:} & A > 1. \end{array}\right. \tag{5}$$

Ist nun gerade:

$$A = 1, \tag{6}$$

so wird:

$$\nu\left(\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - 1\right) = \nu \cdot \frac{(A_1 - B_1)\nu + (P_\nu - Q_\nu)}{\nu^2 + B_1 \nu + Q_\nu} \tag{7}$$
$$= \frac{(A_1 - B_1) + (P_\nu - Q_\nu) \cdot \nu^{-1}}{1 + B_1 \nu^{-1} + Q_\nu \nu^{-2}},$$

1) Es ist keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, daß wir der Potenz $\nu^m$ *im Nenner* den Koeffizienten 1 beigelegt haben. Wäre derselbe nämlich *von* 1 *verschieden*, jedoch *positiv*, etwa $= B$, so kann man ihn durch Multiplikation des Zählers und Nenners mit $\frac{1}{B}$ allemal auf 1 reduzieren.

2) Man bemerke, daß diese Umformung ihren Sinn behält und die daran geknüpften Schlüsse gültig bleiben, wenn speziell: $A_1 = B_1 = 0$ sein sollte.

und daher:

$$\lim_{\nu\to\infty} \nu\left(\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - 1\right) = A_1 - B_1, \tag{8}$$

sodaß sich mit Benützung des Kriteriums (L′, 1), S. 385, ergibt:

$$\begin{cases} \textit{Divergenz}, \text{ falls: } & A = 1,\ A_1 - B_1 < 1, \\ \textit{Konvergenz}, \text{ falls: } & A = 1,\ A_1 - B_1 > 1. \end{cases} \tag{9}$$

Ist nun wiederum:

$$A_1 - B_1 = 1, \tag{10}$$

so wird:

$$\nu \cdot \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - (\nu + 1) = \frac{(P_\nu - Q_\nu - B_1) \cdot \nu^{-1} - Q_\nu \cdot \nu^{-2}}{1 + B_1 \nu^{-1} + Q_\nu \cdot \nu^{-2}}, \tag{11}$$

und daher:

$$\lim_{\nu\to\infty} \lg \nu \cdot \left(\nu \cdot \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - (\nu+1)\right) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\lg \nu}{\nu} \cdot \frac{(P_\nu - Q_\nu - B_1) - Q_\nu \nu^{-1}}{1 + B_1 \nu^{-1} + Q_\nu \nu^{-2}} = 0, \tag{12}$$

sodaß mit Benützung des Divergenzkriteriums (L′, 2) die Reihe $\sum a_\nu$ als *divergent* erkannt wird.

Betrachtet man z. B. die sogenannte *hypergeometrische* Reihe:

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot \beta \cdot (\beta+1)}{1 \cdot 2 \quad \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} \cdot x^2 + \cdots,$$

für welche also:

$$a_\nu = \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdots (\alpha+\nu-1) \cdot \beta \cdot (\beta+1) \cdots (\beta+\nu-1)}{1 \cdot 2 \quad \cdots \quad \nu \quad \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) \cdots (\gamma+\nu-1)} \cdot x^\nu, \tag{13}$$

und daher:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = \frac{(\nu+1) \cdot (\gamma+\nu)}{(\alpha+\nu) \cdot (\beta+\nu)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{x}\{\nu^2 + (1+\gamma)\nu + \gamma\}}{\nu^2 + (\alpha+\beta)\nu + \alpha\beta} \tag{14}$$

(wo $x$ eine positive, $\alpha, \beta, \gamma$ beliebige reelle Zahlen mit Ausnahme der *ganzen negativen* bedeuten sollen[1])), so folgt zunächst aus (5), daß die Reihe *divergiert* für $x > 1$, *konvergiert* für $x < 1$.

Ist sodann $x = 1$, so hat man hier: $A_1 = 1 + \gamma$, $B_1 = \alpha + \beta$, und somit ist die Reihe *divergent*, falls $\gamma \leqq \alpha + \beta$, *konvergent*, falls $\gamma > \alpha + \beta$. —

1) Wäre nämlich $\alpha = -\nu$ oder $\beta = -\nu$ (wo $\nu$ eine natürliche Zahl), so würde $a_{\nu+\varrho} = 0$ (für $\varrho = 1, 2, 3, \cdots$); und wäre $\gamma = -\nu$, so würde im Nenner von $a_{\nu+\varrho}$ ($\varrho = 1, 2, 3, \cdots$) die *Null* als Faktor auftreten, die Reihe also sinnlos werden. Sind im übrigen die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma$ sämtlich oder zum Teil *negativ*, so werden unter den Anfangsgliedern der Reihe auch *negative* vorkommen. Da indessen die Faktoren $\alpha + \nu$, $\beta + \nu$, $\gamma + \nu$ von einer gewissen Stelle $\nu = n$ ab sämtlich *positiv* werden müssen, so haben alle $a_\nu$ für $\nu \geqq n$ *dasselbe Vorzeichen*, sodaß sich die Reihe *im wesentlichen* wie eine solche *mit lauter positiven Gliedern* verhält (vgl. § 57, Nr. 1, S. 401).

2. Die oben für den Fall der Beziehung (1) gewonnenen Kriterien lassen sich noch in gewisser Weise *verallgemeinern.* Zunächst folgt aus (2) für $A = 1$, daß sich der Quotient $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ mit Hilfe einer identischen Umformung auch in die Form setzen läßt:

$$(15)\qquad \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{A_1 - B_1}{\nu} + \frac{(P_\nu - Q_\nu - A_1 B_1 + B_1^2) - (A_1 - B_1) Q_\nu \cdot \nu^{-1}}{\nu^2 + B_1 \nu + Q_\nu},$$

oder anders geschrieben:

$$(16)\qquad \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{R_\nu}{\nu^2},$$

wo:

$$(17)\qquad \begin{cases} k = A_1 - B_1 \\ R_\nu = \dfrac{P_\nu - Q_\nu - A_1 B_1 + B_1^2 - (A_1 - B_1) Q_\nu \cdot \nu^{-1}}{1 + B_1 \nu^{-1} + Q_\nu \nu^{-2}}, \end{cases}$$

also mit Benützung von Gl. (3):

$$(18)\qquad \lim_{\nu \to \infty} R_\nu = A_2 - B_2 - A_1 B_1 + B_1^2.$$

Man erkennt nun ohne weiteres, daß die oben gefundenen Divergenz- und Konvergenzbedingungen ganz und gar nicht von der besonderen Form des $R_\nu$ abhängen, sondern lediglich darauf beruhen, daß $R_\nu$ mit $\nu$ *nicht* ins Unendliche wächst.

Betrachten wir also jetzt Reihen $\sum a_\nu$, für welche der Quotient $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ sich in der Weise in die Form (16) setzen läßt, daß $k$ eine beliebige von $\nu$ *unabhängige*, $R_\nu$ eine von $\nu$ *eventuell abhängige* Zahl bedeutet und $\overline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} R_\nu < \infty$, so hat man zunächst:

$$(19)\qquad \lim_{\nu \to \infty} \nu \left( \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - 1 \right) = k,$$

sodaß die Reihe nach (9) *divergiert*, falls $k < 1$, *konvergiert*, falls $k > 1$.

Ist sodann $k = 1$, so wird:

$$(20)\qquad \lim_{\nu \to \infty} \lg \nu \left( \nu \cdot \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - (\nu + 1) \right) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{R_\nu \lg \nu}{\nu} = 0, \text{ }^{1)}$$

woraus dann wieder nach (12) die *Divergenz* von $\sum a_\nu$ resultiert.

Dem zuletzt betrachteten Reihentypus gehören u. a. alle diejenigen Reihen an, bei denen sich $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ zum mindesten für $\nu \geqq n$ durch eine *kon-*

---

1) Es würde also für das fragliche Resultat auch schon ausreichen, wenn nur:

$$R_\nu < \frac{\nu}{\lg \nu}.$$

*vergierende Reihe* von der Form:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{b_1}{\nu} + \frac{b_2}{\nu^2} + \frac{b_3}{\nu^3} + \cdots \tag{21}$$

darstellen läßt, in welchem Falle offenbar:

$$R_\nu = b_2 + \frac{b_3}{\nu} + \frac{b_4}{\nu^2} + \cdots = b_2 + \frac{1}{\nu}\left(b_3 + \frac{b_4}{\nu} + \cdots\right). \tag{22}$$

Da, wie leicht zu sehen[1]), die Reihe (21) zum mindesten für $\nu \geqq n+1$ auch konvergent bleibt, wenn man die $b_\nu$ durch ihre absoluten Beträge ersetzt, so hat man, wenn etwa:

$$|b_3| + \frac{|b_4|}{n+1} + \frac{|b_5|}{(n+1)^2} + \cdots = s$$

gesetzt wird, für $\nu > n+1$:

$$|R_\nu - b_2| < \frac{1}{\nu} \cdot s,$$

d. h.:

$$\lim_{\nu \to \infty} R_\nu = b_2.$$

Die Reihe $\sum a_\nu$ *divergiert* also, falls $b_1 \leqq 1$, sie *konvergiert*, falls $b_1 > 1$.

## § 56. Über die Tragweite der Kriterien zweiter Art und ihre Beziehungen zu den Kriterien erster Art.

1. Wie bereits in § 47, Nr. 3 (S. 321) und Nr. 4 (S. 323) hervorgehoben wurde, liegt es in der Natur der Sache, daß die Tragweite irgendeines Kriteriums *zweiter* Art wesentlich geringer sein muß, als diejenige des entsprechenden Kriteriums *erster* Art.

Hierzu mag zunächst in Hinsicht auf das Cauchysche Fundamentalkriterium zweiter Art noch ausdrücklich bemerkt werden, daß die *Existenz* eines bestimmten *Grenzwertes* $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ oder auch nur solcher *Hauptlimites*,

---

1) Man hat nämlich für $\lambda = 1, 2, 3, \cdots$

$$\frac{|b_\lambda|}{\nu^\lambda} = \frac{|b_\lambda|}{n^\lambda} \cdot \left(\frac{n}{\nu}\right)^\lambda,$$

also, da die Zahlen $\frac{|b_\lambda|}{n^\lambda}$ infolge der für $\nu = n$ bestehenden Konvergenz der Reihe (21) eine endliche obere Grenze $G$ haben müssen, für $\nu \geqq n+1$:

$$\frac{|b_\lambda|}{\nu^\lambda} \leqq G \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^\lambda,$$

wo $\left(\frac{n}{n+1}\right)^\lambda$ das allgemeine Glied einer *konvergenten* Reihe ist.

welche *beide* $< 1$ bzw. *beide* $> 1$, durch die *Konvergenz* bzw. *Divergenz* der Reihe $\sum a_\nu$ *in keiner Weise präjudiziert* wird. Dies geht wiederum mit voller Evidenz schon daraus hervor, daß die *Konvergenz* bzw. *Divergenz* einer Reihe $\sum a_\nu$ *nicht* alteriert wird, wenn man die Terme $a_\nu$ irgendwie *umordnet* oder mit ganz *beliebigen* positiven (nur im Falle der *Konvergenz* stets unter einer festen Schranke, im Falle der *Divergenz* stets oberhalb einer positiven Zahl bleibenden) Faktoren *multipliziert*: jede dieser Operationen läßt sich dann offenbar so einrichten, daß für die resultierende Reihe $\sum a_\nu'$ die Quotienten $\frac{a'_{\nu+1}}{a'_\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ den verschiedenartigsten Gesetzen gehorchen. Bildet man z. B. aus der Reihe: $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = \sum_0^\infty{}^\nu \alpha^\nu$, welche für $\alpha < 1$ *konvergiert*, für $\alpha > 1$ *divergiert*, eine neue Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu'$, indem man jedes Glied von der Form $a_{2\lambda+1}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \cdots)$ *vor* das entsprechende Glied $a_{2\lambda}$ setzt — eine Operation, die sich übrigens durch die Formel ausdrücken läßt:

$$(1) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu \alpha^\nu = \sum_0^\infty{}^\nu \alpha^{\nu+(-1)^\nu} \quad (\text{also: } a_\nu' = \alpha^{\nu+(-1)^\nu}),$$

so ergibt sich:

$$\frac{a'_{\nu+1}}{a'_\nu} = \frac{\alpha^{\nu+1+(-1)^{\nu+1}}}{\alpha^{\nu+(-1)^\nu}} = \alpha^{1-2\cdot(-1)^\nu},$$

d. h.:

$$\frac{a'_{2\lambda+1}}{a'_{2\lambda}} = \alpha^{-1}, \quad \frac{a'_{2\lambda+2}}{a'_{2\lambda+1}} = \alpha^3,$$

sodaß also die Werte der Quotienten $\frac{a'_{\nu+1}}{a'_\nu}$ abwechselnd *oberhalb* und *unterhalb* der *Einheit* liegen, gleichgültig ob $\alpha < 1$ *(Konvergenz)* oder $\alpha > 1$ *(Divergenz)*.

Wendet man denselben Umordnungsprozeß auf die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $a_\nu = \alpha^{\nu^2}$ an, für welche:

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \alpha^{2\nu+1},$$

und somit,

$$\text{falls} \quad \alpha < 1: \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 0 \quad (\textit{Konvergenz}),$$

$$\text{falls} \quad \alpha > 1: \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \infty \quad (\textit{Divergenz}),$$

so ergibt sich für die resultierende Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu' = \sum_0^\infty{}_\nu \alpha^{(\nu+(-1)^\nu)^2}$:

$$\frac{a'_{\nu+1}}{a'_\nu} = \frac{\alpha^{\nu^2+2\nu+1+2(\nu+1)\cdot(-1)^{\nu+1}+1}}{\alpha^{\nu^2+2\nu\cdot(-1)^\nu+1}} = \alpha^{2\nu(1-2\cdot(-1)^\nu)-2\cdot(-1)^\nu+1},$$

und daher:

$$\frac{a'_{2\lambda+1}}{a'_{2\lambda}} = \alpha^{-4\lambda-1}, \quad \frac{a'_{2\lambda+2}}{a'_{2\lambda+1}} = \alpha^{6(2\lambda+1)+3}.$$

Man erkennt hieraus, daß der Quotient $\frac{a'_{\nu+1}}{a'_\nu}$ die Hauptlimites 0 und $\infty$ besitzt, gleichgültig, ob $\alpha<1$ (*Konvergenz*) oder $\alpha>1$ (*Divergenz*). Obschon also — im Falle $\alpha<1$ — beim Übergange von $a'_{2\lambda}$ zu $a'_{2\lambda+1}$ jedesmal eine so starke *Zu*nahme erfolgt, daß der Quotient $\frac{a'_{2\lambda+1}}{a'_{2\lambda}}$ mit $\lambda$ über alle Grenzen wächst, so ist die betreffende Reihe nichtsdestoweniger *konvergent*; und das analoge gilt im *Divergenz*falle $\alpha>1$ bezüglich der Glieder*ab*nahme.

2. Bei den eben betrachteten Beispielen findet immerhin eine beständig alternierende *Ab-* und *Zu*nahme der Glieder statt. Es lassen sich aber auch *konvergente* Reihen von der Beschaffenheit angeben, daß die Stellen $\nu$, für welche der Quotient $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ *jede noch so große* Zahl übersteigt, schließlich immer *zahlreicher* werden, während die Häufigkeit der Stellen, an welchen eine Glieder*ab*nahme stattfindet, mit wachsendem $\nu$ *unbegrenzt abnimmt.* Das analoge gilt wiederum *mutatis mutandis* für den *Divergenz*fall.

Es werde gesetzt:

(2) $$a_\nu = \frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)\cdots([\sqrt{\nu}]+1)^2},$$

wo $[\sqrt{\nu}]$ die größte in $\sqrt{\nu}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet und das im Nenner von $a_\nu$ stehende Produkt sich auf alle ganzen Zahlen von $\nu$ bis $([\sqrt{\nu}]+1)^2$ einschließlich erstrecken soll. Da nun:

$$[\sqrt{\nu}]+1>\sqrt{\nu},$$

also:

$$([\sqrt{\nu}]+1)^2>\nu, \quad \text{d. h.} \geqq \nu+1,$$

so erkennt man zunächst, daß:

$$a_\nu \leqq \frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)},$$

und somit $\sum a_\nu$ *konvergiert.* Legt man $\nu$ einen der Werte:

$$\lambda^2,\ \lambda^2+1,\ \cdots,\ (\lambda+1)^2-1 \quad (\lambda=1,2,3,\cdots)$$

bei, so hat man wegen: $\lambda^2 \leqq \nu < (\lambda+1)^2$ durchweg:

$$[\sqrt{\nu}] = \lambda$$

und daher:

(3a) $$a_\nu = \frac{1}{\nu \cdot (\nu+1) \cdots (\lambda+1)^2} \quad (\text{für: } \lambda^2 \leqq \nu < (\lambda+1)^2).$$

Gehören also $\nu$ und $(\nu+1)$ *beide* der Zahlenreihe $\lambda^2, \lambda^2+1, \cdots, (\lambda+1)^2-1$ an, so wird:

(3b) $$a_{\nu+1} = \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\lambda+1)^2},$$

und somit:

(4) $$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \nu.$$

Dagegen hat man für: $\nu = (\lambda+1)^2 - 1,\ \nu+1 = (\lambda+1)^2$:

(5) $$\begin{cases} a_\nu = \dfrac{1}{((\lambda+1)^2-1)(\lambda+1)^2} \\ a_{\nu+1} = \dfrac{1}{(\lambda+1)^2((\lambda+1)^2+1)\cdots(\lambda+2)^2}, \end{cases}$$

und:

(6) $$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{(\lambda+1)^2-1}{((\lambda+1)^2+1)\cdots(\lambda+2)^2} = \frac{\nu}{(\nu+2)\cdots([\sqrt{\nu+1}]+1)^2}.$$

Der Quotient $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ nimmt somit *„im allgemeinen"* nach Gl. (5) den *(schließlich über alle Grenzen wachsenden)* Wert $\nu$ an, nämlich *mit einziger Ausnahme* der offenbar in immer größeren Abständen auftretenden Stellen: $\nu = (\lambda+1)^2 - 1$ $(\lambda = 1, 2, 3, \cdots)$, wo also $(\nu+1)$ eine *Quadratzahl* ist.

Betrachtet man statt der Reihe $\sum a_\nu$ die Reihe $\sum \frac{1}{a_\nu}$, so hat man offenbar eine *divergente* Reihe mit den *entsprechenden* Eigentümlichkeiten, d. h. der betreffende Quotient nimmt hier *„im allgemeinen"* den mit wachsendem $\nu$ *beliebig klein* werdenden Wert $\frac{1}{\nu}$ an, während die *nur vereinzelt* auftretenden Stellen, bei welchen eine Glieder*zu*nahme stattfindet, immer *seltener* werden.

3. Um die Beziehung zwischen den Cauchyschen Fundamentalkriterien *erster* und *zweiter* Art (§ 50, S. 341, Formel (D′) und § 54, S. 385, Formel ($K_1''$) und Fußnote) festzustellen, beweisen wir zunächst den folgenden (in der Hauptsache von Cauchy herrührenden) Satz:

*Ist $l \geqq 0$ der untere, $L \leqq \infty$ der obere Limes von $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ für $\nu \to \infty$, so ist der untere Limes von $\sqrt[\nu]{a_\nu}$ mindestens $= l$,*

*der obere höchstens* $= L$. *Ist also insbesondere* $l = L$, *also* $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = L$, *so wird auch* $\lim\limits_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{a_\nu} = L$.

Beweis. Wir setzen zunächst $l$ als *positiv* (also *von Null verschieden*), $L$ als *endlich* voraus. Alsdann läßt sich einer *beliebig klein* (insbesondere $< l$) anzunehmenden *positiven* Zahl $\varepsilon$ eine *positive ganze* Zahl $m$ so zuordnen, daß:

$$(7) \qquad l - \varepsilon < \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} < L + \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq m.$$

Ist sodann $n$ eine positive ganze Zahl $> m$, und setzt man in Ungl. (7) der Reihe nach $\nu = m, (m+1), \cdots, (n-1)$, so folgt durch Multiplikation der resultierenden Ungleichungen:

$$(l - \varepsilon)^{n-m} < \frac{a_n}{a_m} < (L + \varepsilon)^{n-m},$$

also, wenn man diese Ungleichung mit $a_m$ multipliziert und in die $\frac{1}{n}$te Potenz erhebt:

$$(8) \qquad (l - \varepsilon)^{1-\frac{m}{n}} \cdot a_m^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{a_n} < (L + \varepsilon)^{1-\frac{m}{n}} \cdot a_m^{\frac{1}{n}}.$$

Läßt man jetzt $n$ ins Unendliche wachsen, so folgt, wegen:

$$\lim_{n \to \infty} (l - \varepsilon)^{-\frac{m}{n}} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} (L + \varepsilon)^{-\frac{m}{n}} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} a_m^{\frac{1}{n}} = 1$$

(s. § 30 am Ende, S. 186) zunächst:

$$l - \varepsilon \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqq L + \varepsilon,$$

und da $\varepsilon$ beliebig klein gemacht werden kann, schließlich:

$$(9) \qquad l \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqq L.$$

*In Worten:* Das *Grenzintervall* von $\sqrt[n]{a_n}$ kann *niemals* über dasjenige von $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *hinausragen* (wohl aber *enger* sein). Ist nun speziell $l = L$, so folgt aus Ungl. (9), daß auch:

$$(10) \qquad l = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = L,$$

d. h. man hat allemal:

$$(11) \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

wenn dieser *letztere* Grenzwert *existiert* (die Werte 0 und $\infty$ vorläufig noch ausgeschlossen) — aber *nicht umgekehrt* (Beispiel s. Nr. 4).

Ist jetzt $l = 0$ bzw. $L = \infty$, so bleibt Ungl. (9) offenbar gleichfalls in Kraft, solange $l$ und $L$ verschieden sind, da ja der *untere* Limes von $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *mindestens* $= 0$, der *obere höchstens* $= \infty$ ist.

Hat man dagegen $l = L = 0$, so tritt an die Stelle der Ungleichung (7) eine von der Form:

$$0 < \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \nu \geqq m,$$

und daher an die Stelle von Ungl. (8) die folgende:

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon^{1-\frac{m}{n}} : a_m^{\frac{1}{n}},$$

woraus dann analog wie oben:

$$(12) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 \quad \left(= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

resultiert.

Ist schließlich $l = L = \infty$, so hat man: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 0$, wenn $b_\nu = \frac{1}{a_\nu}$ gesetzt wird; und somit nach Gl. (12):

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}},$$

also:

$$(13) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty \quad \left(= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz ohne jede Einschränkung bewiesen.

4. Das in Gl. (11), (12), (13) enthaltene Resultat kann zuweilen mit Vorteil dazu verwendet werden, um den Grenzwert von $\sqrt[\nu]{p_\nu}$ für $\nu \to \infty$ zu berechnen, wenn derjenige von $\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu}$ leichter zu ermitteln ist. So findet man jetzt z. B. aus:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{(\nu+1)^m}{\nu^m} = 1 \quad (m \gtreqless 0), \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{(\nu+1)!}{\nu!} = \infty$$

ohne weiteres:

$$(14) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu^m} = 1\,^{1)}, \quad \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu!} = \infty.$$

Als Beispiel dafür, daß diese Schlußweise, wie oben im Anschluß an Gl. (11) bemerkt wurde, *nicht umkehrbar* ist, betrachte man die Ausdrücke:

$$(15) \qquad p_\nu = \nu^{(-1)^\nu}, \quad q_\nu = \left(\frac{\nu + (-1)^\nu}{\nu}\right)^\nu.$$

---

1) Vgl. § 37, Nr. 3, S. 230, Fußn. 1.

Hier wird:

$$(16)\quad \left|\begin{array}{ll} \text{(a)} & \lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{p_\nu} = 1 \quad \left(\text{da nach (14): } \lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu^{-1}} = 1\right), \\ \text{(b)} & \lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{q_\nu} = 1, \end{array}\right.$$

dagegen:

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} = \frac{(\nu+1)^{(-1)^{\nu+1}}}{\nu^{(-1)^\nu}} = (\nu\cdot(\nu+1))^{(-1)^{\nu+1}},$$

und dieser Ausdruck hat für $\nu \to \infty$ den Grenzwert 0 oder $\infty$, je nachdem $\nu$ *gerade* oder *ungerade*. Man hat somit:

$$(17)\qquad \varliminf_{\nu\to\infty} \frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} = 0, \quad \varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} = \infty.$$

Andererseits besitzt

$$q_\nu = \left(1 + \frac{(-1)^\nu}{\nu}\right)^\nu$$

bei *geraden* Werten von $\nu$ für $\nu \to \infty$ den Grenzwert $e$, bei *ungeraden* den Grenzwert $e^{-1}$, sodaß also:

$$(18)\qquad \varliminf_{\nu\to\infty} \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} = \frac{1}{e^2}, \quad \varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} = e^2. \text{ —}$$

Die Anwendung des in Nr. 3 bewiesenen Satzes auf die Cauchyschen Fundamentalkriterien ergibt offenbar das folgende Resultat:

*Liefert das Fundamentalkriterium zweiter Art bezüglich der Reihe $\sum a_\nu$ eine Entscheidung, oder versagt es in der Weise, daß der Grenzwert 1 zum Vorschein kommt, so gilt das gleiche von dem Kriterium erster Art.*

*Dagegen kann das letztere noch eine Entscheidung liefern, wenn das erstere in der Weise versagt, daß:*

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \leqq 1, \quad \textit{dagegen:} \quad \varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \geqq 1.\text{[1]}$$

Man betrachte z. B. die in Nr. 1 durch Umordnung der Reihen $\sum_0^\infty{}_\nu\, \alpha^\nu$, $\sum_0^\infty{}_\nu\, \alpha^{\nu^2}$ gebildeten Reihen: $\sum_0^\infty{}_\nu\, \alpha^{\nu+(-1)^\nu}$, $\sum_0^\infty{}_\nu\, \alpha^{(\nu+(-1)^\nu)^2}$, welche offenbar auf das Cauchysche Kriterium *erster* Art reagieren, während

1) Das *Gleichheits*zeichen soll dabei natürlich nur für *eine* der beiden Beziehungen gelten, da ja andernfalls:

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}, \quad \text{d. h.: } \lim_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 1.$$

dasjenige *zweiter* Art vollständig versagt; ferner die Reihe mit dem allgemeinen Gliede: $a_\nu = p_\nu \cdot \alpha^\nu = \nu^{(-1)^\nu} \cdot \alpha^\nu$. Hier wird: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{a_\nu} = \alpha$ (Gl. 16a), woraus die *Konvergenz* der Reihe für $\alpha < 1$, die *Divergenz* für $\alpha > 1$ resultiert. Dagegen hat man nach Gl. (17):

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 0, \quad \varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \infty,$$

sodaß also das Kriterium *zweiter* Art wieder vollständig versagt.

Bei der Reihe mit dem allgemeinen Gliede: $a_\nu = q_\nu \cdot \alpha^\nu = \left(\frac{\nu + (-1)^\nu}{\nu} \cdot \alpha\right)^\nu$ hat man ebenfalls (nach Gl. (16b)): $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{a_\nu} = \alpha$, also *Konvergenz* für $\alpha < 1$, *Divergenz* für $\alpha > 1$. Andererseits wird nach Gl. (18):

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{\alpha}{e^2}, \quad \varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = e^2 \cdot \alpha,$$

woraus nur soviel gefolgert werden kann, daß die Reihe für $\alpha < \frac{1}{e^2}$ *konvergiert*, für $\alpha > e^2$ *divergiert*, während für solche Werte von $\alpha$, welche dem Intervalle $\frac{1}{e^2} \leqq \alpha \leqq e^2$ angehören, das Verhalten der Reihe fraglich bleibt.

5. Eine ganz analoge Beziehung, wie die soeben für die Cauchyschen Fundamentalkriterien entwickelte, findet ganz allgemein zwischen den disjunktiven Kriterien *zweiter* und den entsprechenden *erster* Art statt.[1]) Setzt man, wie in § 54, S. 382, Gl. (16):

$$(19) \quad l_n = D_n \cdot \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1}, \text{ wo: } D_n^{-1} = M_n - M_{n-1} \text{ (a.a.O. Gl. (12))},$$

so lautet das *disjunktive Kriterium zweiter Art* (a. a. O. Formel ($K_1$)):

$$(20) \qquad \varliminf_{n\to\infty} l_n \begin{cases} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

Wird ferner gesetzt:

$$(21) \qquad k_n = \frac{\lg \dfrac{M_n - M_{n-1}}{a_{n+p}}}{M_n} = \frac{\lg \dfrac{1}{D_n a_{n+p}}}{\sum\limits_0^n {}^\nu D_\nu^{-1}} \quad \text{(wo speziell: } D_0^{-1} = M_0\text{)},$$

so hat man als *disjunktives Kriterium erster Art* (§ 50, S. 338, Formel (E)):

$$(22) \qquad \varlimsup_{n\to\infty} k_n \begin{cases} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

---

1) Über die Beziehung der Kriterien *zweiter* Art zu der *Grenzwertform* der Kriterien *erster* Art s. die Bemerkungen in § 47, Nr. 3 (S. 322) und § 54, Nr. 2 (S. 379).

Es soll nun gezeigt werden, daß *das Grenzintervall von* $k_n$ *niemals* über dasjenige von $l_n$ *hinausragen* kann, und daß daher insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \lim\limits_{n\to\infty} l_n$ wird, falls der *letztere* Grenzwert *existiert*.

Dabei können wir uns auf den Fall $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = \infty$ beschränken, da die Annahme eines *endlichen* $\lim\limits_{n\to\infty} D_n$, wobei man offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = 1$ setzen kann, auf den zuvor behandelten Fall der Cauchyschen Fundamentalkriterien führt. (Die Annahme, daß $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = 0$ oder daß dieser Grenzwert überhaupt nicht existiert, bietet für die Kriterienbildung kein Interesse.)

Seien nun $l, L$ die zunächst als *endlich* angenommenen Hauptlimites von $l_n$ für $n \to \infty$, so kann man jeder beliebig kleinen positiven Zahl $\varepsilon$ eine positive ganze Zahl $m$ so zuordnen, daß:

$$(23) \qquad l - \varepsilon < D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1} < L + \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq m$$

und außerdem im Falle $l \leqq 0$:

$$(24) \qquad \left| \frac{l-\varepsilon}{D_{\nu+1}} \right| < 1 \quad \text{für} \quad \nu \geqq m.$$[1]

Bringt man sodann Ungl. (23) auf die Form:

$$1 + \frac{l-\varepsilon}{D_{\nu+1}} < \frac{D_\nu\, a_{\nu+p}}{D_{\nu+1}\, a_{\nu+p+1}} < 1 + \frac{L+\varepsilon}{D_{\nu+1}} \quad (\nu \geqq m),$$

so folgt, daß auch:

$$(25) \quad \lg\left(1 + \frac{l-\varepsilon}{D_{\nu+1}}\right) < \lg \frac{D_\nu\, a_{\nu+p}}{D_{\nu+1}\, a_{\nu+p+1}} < \lg\left(1 + \frac{L+\varepsilon}{D_{\nu+1}}\right) \quad (\nu \geqq m).$$

Nun ist allgemein für $\alpha > -1$ (§ 34, S. 206, Ungl. (3)):

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \leqq \lg(1+\alpha) \leqq \alpha,$$

sodaß aus Ungl. (25) die folgende resultiert:

$$(26) \qquad \frac{\dfrac{l-\varepsilon}{D_{\nu+1}}}{1 + \dfrac{l-\varepsilon}{D_{\nu+1}}} < \lg \frac{D_\nu\, a_{\nu+p}}{D_{\nu+1}\, a_{\nu+p+1}} < \frac{L+\varepsilon}{D_{\nu+1}} \quad (\nu \geqq m).$$

---

1) Im Falle $L \leqq 0$ hat man, wegen $l \leqq L$, stets: $|l| \geqq |L|$, sodaß gleichzeitig mit: $\left|\frac{l-\varepsilon}{D_{\nu+1}}\right| < 1$ schon von selbst auch: $\left|\frac{L-\varepsilon}{D_{\nu+1}}\right| < 1$.

Durch Substitution von $\nu = m, m+1, \cdots, n-1$ (wo $n > m$) und durch Addition der betreffenden Ungleichungen findet man:

$$(27) \qquad (l-\varepsilon)\cdot\sum_{m+1}^{n}{}_{\nu}\, p_\nu \cdot D_\nu^{-1} < \lg\frac{D_m a_{m+p}}{D_n a_{n+p}} < (L+\varepsilon)\sum_{m+1}^{n}{}_{\nu}\, D_\nu^{-1},$$

wo:

$$(28) \qquad p_{\nu+1} = \frac{1}{1+\frac{l-\varepsilon}{D_{\nu+1}}}, \quad \text{also: } \lim_{\nu\to\infty} p_\nu = 1.$$

Dividiert man die letzte Ungleichung noch durch $\sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, D_\nu^{-1}$ und läßt sodann $n$ ins Unendliche wachsen, wobei offenbar:

$$\sum_{m+1}^{n}{}_{\nu}\, p_\nu D_\nu^{-1} \cong \sum_{m+1}^{n}{}_{\nu}\, D_\nu^{-1} \cong \sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, D_\nu^{-1} \quad (\S\, 48,\ \text{S. } 325,\ \text{Fußn. } 2),$$

und:

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\lg\frac{D_m a_{m+p}}{D_n a_{n+p}}}{\sum_0^n{}_\nu\, D_\nu^{-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lg D_m a_{m+p}}{\sum_0^n{}_\nu\, D_\nu^{-1}} + \varliminf_{n\to\infty}\frac{\lg\frac{1}{D_n a_{n+p}}}{\sum_0^n{}_\nu\, D_\nu^{-1}}$$

$$= \varliminf_{n\to\infty}\frac{\lg\frac{1}{D_n a_{n+p}}}{\sum_0^n{}_\nu\, D_\nu^{-1}},$$

so geht aus Ungl. (27) die folgende hervor:

$$l-\varepsilon \leqq \varliminf_{n\to\infty}\frac{\lg\frac{1}{D_n a_{n+p}}}{\sum_0^n{}_\nu\, D_\nu^{-1}} \leqq L+\varepsilon,$$

und da $\varepsilon$ beliebig klein gemacht werden kann, schließlich:

$$(29) \qquad l \leqq \varlimsup_{n\to\infty} k_n \leqq L.$$

Ist also speziell $l = L$ d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$ endlich und bestimmt (den Wert *Null* eingeschlossen), so wird:

$$(30) \qquad \lim_{n\to\infty} k_n = \lim_{n\to\infty} l_n.$$

Ferner bleibt Ungl. (29) offenbar wieder ohne weiteres gültig, wenn $l = -\infty$, bzw. $L = +\infty$, sofern nur $l$ und $L$ *verschieden* sind.

Ist dagegen $l = L = +\infty$, so tritt an die Stelle der Ungl. (23) eine von der Form:

$$D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1} > A \quad \text{für: } \nu \geqq m,$$

wo $A$ eine *beliebig groß* vorzuschreibende positive Zahl bedeutet. Alsdann folgt aber mit Hilfe der oben angewendeten Schlußweise, daß auch:

$$\lim_{n\to\infty} k_n \geqq A \quad \text{d. h. schließlich: } = \infty$$

werden muß.

Das analoge ergibt sich im Falle $l = L = -\infty$. Die Gleichung (30) behält somit auch ihre Gültigkeit, falls $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \pm\infty$.

Da der zur Ableitung der Beziehungen (29), (30) angewendete Prozeß wiederum *nicht umkehrbar* ist, so ergibt sich hiernach das folgende Resultat:

*Liefert das Kriterium zweiter Art:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, l_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left( D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1} \right)$$

*bezüglich der Reihe $\sum a_\nu$ eine Entscheidung, oder versagt dasselbe durch das Auftreten des Grenzwertes Null, so gilt das gleiche von dem Kriterium erster Art:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, k_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lg \dfrac{1}{D_n a_{n+p}}}{\sum\limits_0^n{}_\nu D_\nu^{-1}}.$$

*Dagegen kann das letztere eine Entscheidung liefern, wenn das erstere in der Weise versagt, daß:*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, l_n \leqq 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, l_n \geqq 0\,[1]).$$

---

1) Wobei selbstverständlich das Zeichen = wiederum nur für *eine* der betreffenden Bedingungen in Betracht kommt.

## Kapitel III.

# Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

### § 57. Absolute und nicht-absolute Konvergenz. — Riemanns Satz über die Herstellung einer nicht-absolut konvergenten Reihe mit gegebenen Gliedern und beliebig vorgeschriebener Summe.

1. Die Untersuchung einer Reihe *mit lauter negativen* Gliedern $(-a_\nu)$, wo also $a_\nu > 0$, läßt sich vermöge der Beziehung:

$$\sum_0^n {}_\nu (-a_\nu) = -\sum_0^n {}_\nu a_\nu$$

ohne weiteres auf diejenige einer Reihe mit *positiven* Gliedern zurückführen.[1]) Insbesondere wird also auch eine solche Reihe immer nur *konvergieren* oder *eigentlich divergieren* (nämlich nach $-\infty$). Und sie wird, falls sie *konvergiert*, stets *unbedingt* konvergieren — auch in dem *erweiterten* Sinne, daß die Reihensumme nicht geändert wird, wenn man $\sum_0^\infty {}_\nu (-a_\nu)$ in eine endliche oder unendliche Anzahl von Partialreihen zerlegt und sodann die aus den Summen der letzteren gebildete Reihe summiert (§ 46, Nr. 3, S. 312). Ebenso läßt sich auch der für ein *zweifach-unendliches* Schema von *positiven* Gliedern $a_\mu^{(\nu)}$ bewiesene Satz (§ 46, Nr. 4, S. 317, Gl. (23)) ohne weiteres auf ein solches von lauter *negativen* Gliedern $(-a_\mu^{(\nu)})$ übertragen.

Auch eine Reihe mit *positiven und negativen* Gliedern, bei welcher entweder die negativen oder die positiven Glieder nur in *endlicher* Zahl vorkommen, bietet nichts wesentlich neues: denn ihre Untersuchung läßt sich nach Abtrennung einer gewissen *endlichen* Anzahl von Anfangsgliedern auf diejenige einer Reihe mit lauter *gleichbezeichneten*, also schließlich mit lauter *positiven* Gliedern zurückführen.

Sei jetzt aber eine Reihe $\sum u_x$ vorgelegt, welche sowohl positive als negative Glieder in unbegrenzter Anzahl enthält. Werden alsdann die *positiven* Glieder in derjenigen Reihenfolge, wie sie in der obigen Reihe auftreten, mit $a_1, a_2, a_3, \cdots$, die *negativen* mit $-b_1, -b_2, -b_3, \cdots$ bezeichnet, und setzt man:

$$(1) \qquad \sum_0^\nu {}_x u_x = s_\nu, \quad \sum_1^\mu {}_x a_x = A_\mu, \quad \sum_1^\mu {}_x b_x = B_\mu,$$

1) Für den Fall der *Konvergenz* s. § 44, S. 302, Gl. (32).

so wird:

$$s_\nu = A_{m_\nu} - B_{n_\nu}, \tag{2}$$

wenn $m_\nu$ die Anzahl der positiven, $n_\nu$ diejenige der negativen Glieder bedeutet, welche in $s_\nu$ vorkommen. Läßt man jetzt $\nu$, also auch $m_\nu$, $n_\nu$ über alle Grenzen wachsen, so folgt:

$$\overline{\underline{\lim_{\nu\to\infty}}}\, s_\nu = \overline{\underline{\lim_{\nu\to\infty}}}\,(A_{m_\nu} - B_{n_\nu}). \tag{3}$$

Es können nun die folgenden drei wesentlich verschiedenen Fälle eintreten:

I. Die Reihen $\sum a_\varkappa$, $\sum b_\varkappa$ sind beide *konvergent*, sodaß man setzen kann:

$$\sum_1^\infty {}_\varkappa\, a_\varkappa = \lim_{\nu\to\infty} A_{m_\nu} = A, \quad \sum_1^\infty {}_\varkappa\, b_\varkappa = \lim_{\nu\to\infty} B_{n_\nu} = B. \tag{4a}$$

Alsdann geht Gl. (3) in die folgende über:

$$\lim_{\nu\to\infty} s_\nu = A - B, \tag{4b}$$

d. h. die vorgelegte Reihe $\sum u_\varkappa$ ist in diesem Falle konvergent und ihre Summe ist gleich der Summe aus: $\sum_1^\infty {}_\varkappa\, a_\varkappa$ und $\sum_1^\infty {}_\varkappa\, (-b_\varkappa)$.

Dabei läßt sich die Bedingung, daß $\sum a_\varkappa$, $\sum b_\varkappa$ *einzeln* konvergieren sollen, noch durch eine etwas einfachere ersetzen. Die aus den absoluten Beträgen der Glieder $u_\varkappa$ gebildete Reihe $\sum |u_\varkappa|$ enthält offenbar genau dieselben Glieder, wie die beiden Reihen $\sum a_\varkappa$, $\sum b_\varkappa$ zusammen, sie *konvergiert* daher sicher, wenn jene *beiden* Reihen *konvergieren.* Und umgekehrt: wenn $\sum |u_\varkappa|$ *konvergiert,* so muß auch *jede* der Reihen $\sum a_\varkappa$, $\sum b_\varkappa$ als eine aus der Reihe $\sum |u_\varkappa|$ (mit lauter *positiven* Gliedern) herausgehobene Partialreihe *konvergieren.* Somit gilt der Satz:

*Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern ist sicher konvergent, wenn die Reihe der absoluten Beträge konvergiert.*

Eine Reihe, für welche diese Voraussetzung zutrifft, soll *absolut konvergent* heißen.

II. *Konvergiert* nur *eine* der beiden Reihen $\sum a_\varkappa$, $\sum b_\nu$, so lehrt Gl. (3), daß $\sum u_\varkappa$ *divergieren* muß und zwar *„eigentlich“*, nämlich nach $+\infty$, wenn $\sum a_\varkappa$ divergiert, nach $-\infty$, wenn $\sum b_\varkappa$ divergiert.

III. *Divergieren* die *beiden* Reihen $\sum a_\varkappa$, $\sum b_\varkappa$, hat man also:

$$\lim_{\nu\to\infty} A_{m_\nu} = \infty, \quad \lim_{\nu\to\infty} B_{n_\nu} = \infty,$$

so läßt sich im allgemeinen aus Gl. (3) zunächst kein bestimmter Schluß auf die Beschaffenheit von $\lim\limits_{\nu\to\infty} s_\nu$ ziehen. Nur in dem Falle, daß $\underline{\lim}\limits_{\varkappa\to\infty} |u_\varkappa|$ bzw. $\overline{\lim}\limits_{\varkappa\to\infty} |u_\varkappa|$ von *Null* verschieden ist, erkennt man nach dem früher gesagten (s. § 44, Nr. 4, S. 299) ohne weiteres, daß $\sum u_\varkappa$ *divergieren* muß. Ist dagegen $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} u_\varkappa = 0$, so läßt sich zeigen, daß $\sum u_\varkappa$ *je nach der Anordnung der Glieder sowohl konvergieren, als auch eigentlich divergieren oder oszillieren kann.*

2. Hierzu beweisen wir zunächst den folgenden von Riemann herrührenden Satz:

> *Hat man zwei unbegrenzte Folgen positiver Zahlen* $(a_\varkappa)$, $(b_\varkappa)$ *von der Beschaffenheit, daß* $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} a_\varkappa = \lim\limits_{\varkappa\to\infty} b_\varkappa = 0$ *ist und die Reihen* $\sum a_\varkappa$, $\sum b_\varkappa$ *divergieren, so lassen sich die Zahlen* $a_1, a_2, a_3, \cdots$ *und* $-b_1, -b_2, -b_3, \cdots$ *derartig in eine unendliche Reihe anordnen, daß dieselbe konvergiert und eine vorgeschriebene Summe s besitzt.*

Beweis. Es sei — um irgendeine Festsetzung zu treffen — die im übrigen beliebig vorzuschreibende Summe $s$ etwa $\geqq 0$ gewählt. Alsdann entnehme man der Folge der $a_\varkappa$ zunächst so viele Glieder $a_1, a_2, \cdots, a_{m_1}$, daß deren Summe die Zahl $s$ gerade *übersteigt* (was infolge der *Divergenz* von $\sum a_\varkappa$ stets möglich ist), aber bei Weglassung des letzten Summanden $a_{m_1}$ die Zahl $s$ *höchstens erreichen* würde, sodaß also:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{m_1} > s, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{m_1-1} \leqq s$$

oder, wenn zur Abkürzung:

(5) $$a_1 + a_2 + \cdots + a_{m_1} = \sigma_1$$

gesetzt wird:

(6) $$\sigma_1 > s \geqq \sigma_1 - a_{m_1}.$$

Nun füge man zu $\sigma_1$ so viele *negative* Glieder $-b_1, -b_2, \cdots, -b_{n_1}$, daß die jetzt entstehende Summe:

(7) $$\sigma_1' = \sigma_1 - b_1 - b_2 - \cdots - b_{n_1}$$

gerade noch *unter s herabsinkt*, aber bei Weglassung des letzten negativen Gliedes $(-b_{n_1})$ die Zahl $s$ *zum mindesten noch erreichen* würde, sodaß also:

(8) $$\sigma_1' < s \leqq \sigma_1' + b_{n_1}.$$

Jetzt bilde man wiederum aus $\sigma_1'$ durch Hinzufügung weiterer *positiver* Glieder eine Summe:

(9) $$\sigma_2 = \sigma_1' + a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \cdots + a_{m_2}$$

von der Art, daß $\sigma_2$ die Zahl $s$ *übersteigt*, aber bei Weglassung des letzten Gliedes $a_{m_2}$ sie *höchstens erreichen* würde, also:

(10) $$\sigma_2 > s \geqq \sigma_2 - a_{m_2},$$

und hierauf durch Hinzufügung weiterer *negativer* Glieder eine Summe:

(11) $$\sigma_2' = \sigma_2 - b_{n_1+1} - b_{n_1+2} - \cdots - b_{n_2},$$

sodaß:

(12) $$\sigma_2' < s \leqq \sigma_2' + b_{n_2}.$$

Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man einmal zu einer aus $m_\nu$ *positiven* Gliedern $(a_1, a_2, \cdots, a_{m_\nu})$ und $n_{\nu-1}$ *negativen* Gliedern $(-b_1, -b_2, \cdots, -b_{n_{\nu-1}})$ bestehenden Summe $\sigma_\nu$, welche nach Analogie von Ungl. (6) und (10) der Bedingung genügt:

(13) $$\sigma_\nu > s \geqq \sigma_\nu - a_{m_\nu},$$

oder anders geschrieben:

(13a) $$0 < \sigma_\nu - s \leqq a_{m_\nu};$$

desgleichen zu einer aus $m_\nu$ *positiven* und $n_\nu$ *negativen* Gliedern bestehenden Summe $\sigma_\nu'$, sodaß:

(14) $$\sigma_\nu' < s \leqq \sigma_\nu' + b_{n_\nu},$$

oder anders geschrieben:

(14a) $$0 < s - \sigma_\nu' \leqq b_{n_\nu}.$$

Infolge der Voraussetzung $\lim\limits_{\varkappa \to \infty} a_\varkappa = \lim\limits_{\varkappa \to \infty} b_\varkappa = 0$ läßt sich aber jeder beliebig kleinen positiven Zahl $\varepsilon$ eine positive ganze Zahl $m$ so zuordnen, daß:

$$a_{m_\nu} < \varepsilon, \quad b_{n_\nu} < \varepsilon, \quad \text{falls: } \left.\begin{matrix} m_\nu \\ n_\nu \end{matrix}\right\} \geqq m,$$

sodaß dann gleichzeitig nach Ungl. (13a), (14a):

(15) $$0 < \sigma_\nu - s < \varepsilon, \quad 0 < s - \sigma_\nu' < \varepsilon$$

wird, woraus zunächst soviel hervorgeht, daß bei unbegrenzter Fortsetzung des angezeigten Verfahrens die besonderen mit $\sigma_\nu$, $\sigma_\nu'$ bezeichneten Summen für $\nu \to \infty$ gegen den Grenzwert $s$ konvergieren.

Bezeichnet man jetzt allgemein mit $s_\mu$ die Summe der ersten $\mu$ Glieder der durch obiges Verfahren erzeugten Reihe, so wird, wenn $s_\mu$ mit einem *negativen* Gliede schließt und etwa:

$$m_\nu + n_{\nu-1} < \mu \leqq m_\nu + n_\nu,$$

$s_\mu$ den Bedingungen genügen:

(16) $$\sigma_\nu > s_\mu \geqq \sigma_\nu'.$$

Schließt dagegen $s_\mu$ mit einem *positiven* Gliede und hat man:

$$m_\nu + n_\nu < \mu \leqq m_{\nu+1} + n_\nu,$$

so wird:

(17) $$\sigma_\nu' < s_\mu \leqq \sigma_{\nu+1},$$

sodaß sich allgemein ergibt:

(18) $$\lim_{\mu\to\infty} s_\mu = \left\{\begin{matrix} \lim\limits_{\nu\to\infty} \sigma_\nu \\ \lim\limits_{\nu\to\infty} \sigma_\nu' \end{matrix}\right\} = s.^{1)}$$

Zugleich ist ohne weiteres klar, wie das betreffende Verfahren zu modifizieren ist, falls etwa $s < 0$ vorgeschrieben worden wäre.

3. Der eben bewiesene Satz ist noch insofern einer Erweiterung fähig, als man durch passende Anordnung der Glieder $(a_\varkappa)$, $(-b_\varkappa)$ auch erzielen kann, daß $s_\mu$ für $\mu \to \infty$ zwischen irgendzwei vorgeschriebenen Zahlen $l$, $L$ *oszilliert* oder auch nach $+\infty$ bzw. $-\infty$ *divergiert.*

Sei etwa die als *oberer* Limes von $s_\mu$ vorgelegte Zahl $L \geqq 0$, so hat man offenbar, um das gewünschte Resultat zu erzielen, mit Beibehaltung der in Nr. 2 gebrauchten Bezeichnung nur so zu verfahren, daß (siehe Ungl. (13) und (14)):

$$\sigma_\nu > L \geqq \sigma_\nu - a_{m_\nu}, \quad \sigma_\nu' < l \leqq \sigma_\nu' + b_{n_\nu},$$

worauf dann:

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, s_\mu = L, \quad \underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, s_\mu = l$$

wird. (Analog für den Fall $L < 0$.)

Soll ferner $\lim\limits_{\mu\to\infty} s_\mu = +\infty$ werden, so nehme man eine Reihe wachsender positiver Zahlen $M_1, M_2, \cdots, M_\nu, \cdots$ so an, daß $\lim\limits_{\nu\to\infty} M_\nu = \infty$. Modifiziert man sodann das in Nr. 2 angegebene Verfahren in *der* Weise, daß:

$$\sigma_\nu > M_\nu \geqq \sigma_\nu - a_{m_\nu}, \quad \sigma_\nu' < M_\nu \leqq \sigma_\nu' + b_{n_\nu},$$

---

1) Der Inhalt dieser letzten Betrachtung läßt sich auch folgendermaßen formulieren. Man hat offenbar:

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, s_\mu = \lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu, \quad \underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, s_\mu = \lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu'$$

und daher, wegen:

$$\lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu' = s,$$

schließlich auch:

$$\lim_{\mu\to\infty} s_\mu = s.$$

so wird offenbar:

$$\lim_{\nu \to \infty} \sigma_\nu = \lim_{\nu \to \infty} \sigma_\nu' = +\infty$$

und sodann auch allgemein:

$$\lim_{\mu \to \infty} s_\mu = +\infty.$$

(Analog für den Fall $\lim\limits_{\mu \to \infty} s_\mu = -\infty$.)

## § 58. Bedingte und unbedingte Konvergenz. — Zusammenfallen von absoluter und unbedingter Konvergenz. — Summen unendlich vieler absolut konvergenter Reihen. — Multiplikation absolut konvergenter Reihen.

1. Eine Reihe von Gliedern $u_\nu$, deren *absolute Beträge* eine *divergente* Reihe bilden, soll *absolut divergent* heißen. Aus dem Satze von Nr. 2 des vorigen Paragraphen (S. 403) folgt alsdann, daß eine solche *keinesfalls absolut* konvergente Reihe immerhin noch *konvergieren* kann, falls $\lim\limits_{\nu \to \infty} u_\nu = 0$ ist, daß aber in diesem Falle der Wert ihrer *Summe* und die *Konvergenz selbst* wesentlich von der *Anordnung* der Glieder abhängt.

Man nennt eine konvergierende Reihe dieser Art *bedingt konvergent*.

Versteht man dagegen, wie schon in § 46, Nr. 2 (S. 311), unter einer *unbedingt konvergenten* Reihe eine solche, welche *unabhängig von der Anordnung* der Glieder gegen *dieselbe Summe* konvergiert, so ergibt sich aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen, daß die *absolute Konvergenz* einer Reihe sicher eine *notwendige* Bedingung für deren *unbedingte Konvergenz* bildet. Wir zeigen, daß diese Bedingung sich zugleich auch als *hinreichend* erweist.

Zunächst erkennt man, daß die *absolute* Konvergenz einer Reihe $\sum u_\nu$, falls sie bei *irgendeiner* Anordnung der Glieder besteht, bei *jeder* beliebigen Anordnung stattfinden muß, da ja nach § 46, Nr. 2 (S. 311) die Konvergenz der Reihe $\sum |u_\nu|$ durch Umordnung der Glieder nicht gestört wird.

Ferner bemerke man: *Ist die Reihe $\sum u_\nu$ absolut konvergent, so gilt das von jeder herausgehobenen Partialreihe* (vgl. § 46, Nr. 3, S. 312).

Es gilt aber auch das umgekehrte, nämlich: *Konvergiert jede aus der Reihe $\sum u_\nu$ herausgehobene Partialreihe, so konvergiert $\sum u_\nu$ absolut.*

Denn auf Grund der obigen Voraussetzung muß insbesondere die Reihe der *positiven*, wie diejenige der *negativen* Glieder konvergieren, woraus dann unmittelbar die *absolute* Konvergenz von $\sum u_\nu$ hervorgeht.

2. Um auch die *Unveränderlichkeit der Summe* $U = \sum_0^\infty{}^{\nu} u_\nu$ unter der Voraussetzung der *absoluten* Konvergenz dieser Reihe nachzuweisen, setzen wir:

(1) $$u_\nu = \varepsilon_\nu u_\nu + (1 - \varepsilon_\nu) \cdot u_\nu\,,$$

wo:

(2) $$\begin{cases} \varepsilon_\nu = 1\,, & \text{wenn: } u_\nu \geqq 0\,, \\ \varepsilon_\nu = 0\,, & \text{wenn: } u_\nu < 0\,. \end{cases}$$

Alsdann wird:

(3) $$\sum_0^\infty{}^{\nu} u_\nu = \sum_0^\infty{}^{\nu} \varepsilon_\nu \cdot u_\nu + \sum_0^\infty{}^{\nu} (1 - \varepsilon_\nu) \cdot u_\nu\,,$$

d. h. die konvergente Reihe $\sum u_\nu$ wird in *der* Weise in die Summe zweier konvergenter Reihen zerlegt, daß die *erste* alle *positiven* Terme $u_\nu$ und im übrigen an allen Stellen, für welche $u_\nu \leqq 0$, *Nullen* enthält, während die *zweite* in analoger Weise aus allen *negativen* Termen $u_\nu$, im übrigen aus *Nullen* besteht. Jede dieser beiden Reihen ist dann nach § 46, Nr. 2 (S. 311) und § 57, Nr. 1 (S. 401) *unbedingt* konvergent.

Bezeichnet man jetzt mit $(n_\nu)$ irgendeine unbegrenzte Zahlenfolge, welche durch *Umordnung* aus der Reihe aller möglichen Zahlen $0, 1, 2, \cdots$ hervorgegangen ist, so wird:

(4) $$\sum_0^\infty{}^{\nu} u_{n_\nu} = \sum_0^\infty{}^{\nu} \varepsilon_{n_\nu} \cdot u_{n_\nu} + \sum_0^\infty{}^{\nu} (1 - \varepsilon_{n_\nu}) \cdot u_{n_\nu}\,,$$

und, da nach dem eben gesagten die Summen der beiden *rechts* stehenden Reihen von den entsprechenden in Gl. (3) auftretenden nicht verschieden sein können, so folgt, daß auch:

(5) $$\sum_0^\infty{}^{\nu} u_{n_\nu} = \sum_0^\infty{}^{\nu} u_\nu\,,$$

d. h.: *Der Summenwert* der vorgelegten *absolut konvergenten* Reihe ist von der Anordnung der Glieder *unabhängig*.

Hiermit ist aber die schließliche Identität von *absoluter* und *unbedingter* Konvergenz vollständig erwiesen. Zugleich ergibt sich, daß man den Begriff der *unbedingten* Konvergenz noch etwas *weiter* fassen kann, als oben in Nr. 1 geschehen, nämlich in der Weise, daß man eine Reihe dann *unbedingt konvergent* nennt, wenn sie *unabhängig von der Anordnung der Glieder konvergiert* (also *ohne* den Zusatz: *gegen dieselbe Summe*). Denn aus dieser Voraussetzung würde schon folgen, daß sie *absolut* kon-

vergieren muß: andernfalls ließe sie sich ja nach dem *erweiterten Riemannschen* Satze (Nr. 3 des vorigen Paragraphen) durch Umordnung auch *divergent* machen. Aus dem Umstande, daß die Reihe *absolut* konvergiert, ergibt sich dann aber ohne weiteres die Unveränderlichkeit ihrer Summe, also die *unbedingte Konvergenz* in dem früheren *engeren* Sinne.

3. Der Satz von der *Unveränderlichkeit der Reihensumme* bleibt aber, geradeso wie bei konvergenten Reihen mit lauter *positiven* Gliedern auch dann noch bestehen, wenn man die *absolut konvergente* Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, u_\nu$ in eine *unendliche* Anzahl von Partialreihen:

$$(6) \qquad \begin{cases} \phantom{+}\,(u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \cdots + u_\mu^{(0)} + \cdots) \\ + (u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \cdots + u_\mu^{(1)} + \cdots) \\ + \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ + (u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \cdots + u_\mu^{(\nu)} + \cdots) \\ + \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \end{cases}$$

zerlegt und sodann die Summe der aus den einzelnen Partialreihen (Zeilensummen) bestehenden Reihe bildet, d. h. man hat:

$$(7) \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, u_\mu^{(\nu)} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, u_\nu .$$

Aus der Voraussetzung folgt nämlich zunächst, daß $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} |u_\nu|$ *konvergiert*, und daß daher nach dem Satze des § 46, Nr. 3 (S. 312):

$$(8) \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \left|u_\mu^{(\nu)}\right| = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} |u_\nu| .$$

Es *konvergiert* somit jede *Zeile* des Schemas (6) *absolut*, und es *konvergiert* die aus den Zeilensummen: $\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \left|u_\mu^{(\nu)}\right|$ gebildete Reihe. Da aber für jedes $n$:

$$\left|\sum_{0}^{n}{}_{\mu}\, u_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \sum_{0}^{n}{}_{\mu} \left|u_\mu^{(\nu)}\right|$$

und daher auch:

$$(9) \qquad \left|\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, u_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \left|u_\mu^{(\nu)}\right| ,$$

so *konvergiert* gleichzeitig mit $\sum_0^\infty{}^\nu \sum_0^\infty{}^\mu \left|u_\mu^{(\nu)}\right|$ auch $\sum_0^\infty{}^\nu \left|\sum_0^\infty{}^\mu u_\mu^{(\nu)}\right|$, d. h. schließlich, es *konvergiert* $\sum_0^\infty{}^\nu \left(\sum_0^\infty{}^\mu u_\mu^{(\nu)}\right)$ *absolut.*[1])

Um noch die Gültigkeit der Gleichung (7) nachzuweisen, führen wir neben der Beziehung (1) die folgende, analog gebildete ein:

$$u_\mu^{(\nu)} = \varepsilon_\mu^{(\nu)} \cdot u_\mu^{(\nu)} + \left(1 - \varepsilon_\mu^{(\nu)}\right) \cdot u_\mu^{(\nu)}, \tag{10}$$

wo:

$$\begin{cases} \varepsilon_\mu^{(\nu)} = 1, & \text{wenn: } u_\mu^{(\nu)} \geqq 0, \\ \varepsilon_\mu^{(\nu)} = 0, & \text{wenn: } u_\mu^{(\nu)} < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Bildet man sodann die beiden Schemata:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_0^{(0)} \cdot u_0^{(0)} + \varepsilon_1^{(0)} \cdot u_1^{(0)} + \cdots & \left(1 - \varepsilon_0^{(0)}\right) \cdot u_0^{(0)} + \left(1 - \varepsilon_1^{(0)}\right) \cdot u_1^{(0)} + \cdots \\ + \varepsilon_0^{(1)} \cdot u_0^{(1)} + \varepsilon_1^{(1)} \cdot u_1^{(1)} + \cdots & + \left(1 - \varepsilon_0^{(1)}\right) \cdot u_0^{(1)} + \left(1 - \varepsilon_1^{(1)}\right) \cdot u_1^{(1)} + \cdots \\ + \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot, & + \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot, \end{array}$$

so enthält das erste *lauter Glieder* $\geqq 0$, nämlich alle diejenigen, welche die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu \varepsilon_\nu \cdot u_\nu$ (Gl. (3)) ausmachen, während das zweite aus *lauter Gliedern* $\leqq 0$, nämlich den Gliedern der Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu (1 - \varepsilon_\nu) \cdot u_\nu$ besteht. Infolgedessen gelten aber die Beziehungen:

$$\begin{cases} \sum_0^\infty{}^\nu \sum_0^\infty{}^\mu \varepsilon_\mu^{(\nu)} \cdot u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}^\nu \varepsilon_\nu \cdot u_\nu \\ \sum_0^\infty{}^\nu \sum_0^\infty{}^\mu \left(1 - \varepsilon_\mu^{(\nu)}\right) \cdot u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}^\nu \left(1 - \varepsilon_\nu\right) \cdot u_\nu, \end{cases} \tag{12}$$

und hieraus folgt unmittelbar durch Addition, daß:

$$\sum_0^\infty{}^\nu \sum_0^\infty{}^\mu u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}^\nu u_\nu, \quad \text{q. e. d.} \tag{13}$$

---

1) Dabei sind also die Summen $\sum_0^\infty{}^\mu u_\mu^{(\nu)}$ für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ als die einzelnen Glieder der in Frage stehenden Reihe aufzufassen.

Sind solche Partialreihen $\sum_0^\infty{}_\mu u_\mu^{(\nu)}$ nur in *endlicher* Anzahl $(n+1)$ vorhanden, so findet man offenbar analog:

$$\sum_0^n{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\nu u_\nu. \tag{14}$$

Schließlich erkennt man noch, daß auch jede *Kolonne* $\sum_0^\infty{}_\nu u_\mu^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ des Schemas (6) *absolut konvergiert*, und daß sodann:

$$\sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\nu u_\nu, \tag{15}$$

bzw., wenn nur $(n+1)$ Kolonnen vorhanden sind:

$$\sum_0^n{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\nu u_\nu. \tag{16}$$

4. Ist wiederum statt der *einfach-unendlichen* Reihe $\sum u_\nu$ von vornherein das *zweifach-unendliche* Schema (6) vorgelegt, so gilt der folgende Satz:

*Von den drei Gleichungen:*

$$(17)\begin{cases} \text{(a)}\ \sum_0^\infty{}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \cdots + u_{\nu-1}^{(1)} + u_\nu^{(0)}\right) = U & \textit{(Reihe der Diagonalen),} \\ \text{(b)}\ \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu u_\mu^{(\nu)} = U & \textit{(Reihe der Zeilensummen),} \\ \text{(c)}\ \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu u_\mu^{(\nu)} = U & \textit{(Reihe der Kolonnensummen)} \end{cases}$$

*(wo $U$ eine endliche Zahl bedeutet) zieht jede einzelne die Existenz der beiden anderen nach sich, sobald die in der Voraussetzung auftretende Reihe bei Vertauschung der $u_\mu^{(\nu)}$ mit ihren absoluten Beträgen konvergent bleibt.*

Beweis. Wird zunächst die Gültigkeit von Gl. (17a) und zugleich die Konvergenz von: $\sum_0^\infty{}_\nu\left(\left|u_0^{(\nu)}\right| + \left|u_1^{(\nu-1)}\right| + \cdots + \left|u_{\nu-1}^{(1)}\right| + \left|u_\nu^{(0)}\right|\right)$ vorausgesetzt, mit anderen Worten: *konvergiert* die *einfach-unendliche* Reihe (17a)

*absolut*, auch wenn man die *einzelnen Summanden* $u_\mu^{(\nu)}$ als die *Glieder* der Reihe auffaßt, so ergibt sich die Richtigkeit der Gleichungen (17b) und (17c) ohne weiteres aus den Betrachtungen der vorigen Nummer, wenn man die in Gl. (17a) auftretende Reihe an die Stelle der dort mit $\sum_0^\infty {}_\nu u_\nu$ bezeichneten setzt.

Besteht dagegen Gl. (17b) bzw. Gl. (17c) mit dem Zusatze, daß auch $\sum_0^\infty {}_\nu \sum_0^\infty {}_\mu |u_\mu^{(\nu)}|$ bzw. $\sum_0^\infty {}_\mu \sum_0^\infty {}_\nu |u_\mu^{(\nu)}|$ konvergiert, so folgt zunächst aus einem für Reihen mit lauter *positiven* Gliedern geltenden Satze (§ 46, Nr. 4, S. 317) die *Konvergenz* der Reihe:

$$\sum_0^\infty {}_\nu \left(|u_0^{(\nu)}| + |u_1^{(\nu-1)}| + \cdots + |u_{\nu-1}^{(1)}| + |u_\nu^{(0)}|\right),$$

und somit die *absolute* Konvergenz der Reihe:

$$\sum_0^\infty {}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \cdots + u_{\nu-1}^{(1)} + u_\nu^{(0)}\right),$$

falls man die einzelnen Summanden $u_\mu^{(\nu)}$ als die Glieder der Reihe auffaßt.

Alsdann ergibt sich aber wiederum aus den Betrachtungen der vorigen Nummer, daß die *Summe* dieser letzteren Reihe mit jeder der beiden Summen (17b) und (17c) identisch sein muß, womit also der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist. —

Hebt man insbesondere dasjenige Resultat heraus, welches sich auf das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen (17b) und (17c) bezieht, so erhält man den folgenden Satz, welcher gewöhnlich schlechthin als der *Cauchysche Doppelreihensatz*[1]) bezeichnet zu werden pflegt:

> *Konvergieren alle Zeilen des Schemas* (6) *und bilden die Zeilensummen eine konvergente Reihe mit der Summe* $U$, *so gilt das gleiche von den einzelnen Kolonnen und von der Reihe der Kolonnensummen, sobald die Konvergenz der einzelnen*

1) Die Benennung ist in Wahrheit *nicht korrekt:* denn es handelt sich in Gl. (17b), (17c) gar nicht um *Doppel*reihen in dem üblichen und späterhin (s. § 62, Nr. 2) noch ausführlich zu erörternden Sinne, vielmehr um solche Summationsanordnungen der zweifach-unendlichen Zahlenfolge (6), die wir passender als *iterierte* Reihen bezeichnen. Da sich aber die obige Benennung des betreffenden Satzes allgemein eingebürgert hat, so wollen wir sie bei gelegentlicher Zitierung desselben beibehalten. (Der Satz findet sich in *Cauchys Analyse algébrique* [1821], p. 541 = Oeuvres (2), T. III, p. 444.)

*Zeilen und der aus den Zeilensummen gebildeten Reihe erhalten bleibt, wenn man die $u_\mu^{(\nu)}$ durch die absoluten Beträge ersetzt.*[1])

5. Aus dem Hauptsatze der vorigen Nummer ergibt sich noch der folgende auf die Multiplikation zweier absolut konvergenter Reihen bezügliche, als *„Cauchysche Multiplikationsregel"* bekannte Satz:

*Sind die Reihen $\sum_0^\infty {}_\nu u_\nu = U$ und $\sum_0^\infty {}_\nu v_\nu = V$ absolut konvergent, so gilt für ihr Produkt die Beziehung:*

$$(18)\qquad U\cdot V = \sum_0^\infty {}_\nu w_\nu,\quad wo:\ w_\nu = u_0 v_\nu + u_1 v_{\nu-1} + \cdots + u_{\nu-1} v_1 + u_\nu v_0,$$

*und die Reihe der $w_\nu$ konvergiert absolut, auch wenn man deren einzelne Bestandteile $u_\mu v_{\nu-\mu}$ als Reihenglieder auffaßt.*

Beweis. Bildet man diejenige Doppelreihe, welche aus (6) entsteht, wenn man $u_\mu^{(\nu)} = |u_\mu v_\nu|$ setzt, also:

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} \phantom{+}\ |u_0 v_0| + |u_1 v_0| + \cdots + |u_\mu v_0| + \cdots\cdots \\ + |u_0 v_1| + |u_1 v_1| + \cdots + |u_\mu v_1| + \cdots\cdots \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + |u_0 v_\nu| + |u_1 v_\nu| + \cdots + |u_\mu v_\nu| + \cdots\cdots \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \end{array}\right.$$

so ergeben sich mit Rücksicht darauf, daß auf Grund der Voraussetzung die Reihen $\sum |u_\mu|$, $\sum |v_\nu|$ *konvergieren*, durch Summation der *Zeilen* die Ausdrücke:

$$\left(\sum_0^\infty {}_\mu |u_\mu|\right)\cdot |v_0|,\quad \left(\sum_0^\infty {}_\mu |u_\mu|\right)\cdot |v_1|,\quad \cdots,\quad \left(\sum_0^\infty {}_\mu |u_\mu|\right)\cdot |v_\nu|,\quad \cdots,$$

und als Summe dieser letzteren Reihe:

$$\left(\sum_0^\infty {}_\mu |u_\mu|\right)\left(\sum_0^\infty {}_\nu |v_\nu|\right).$$

Daraus folgt weiter, daß das Schema

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} \phantom{+}\ u_0 v_0 + u_1 v_0 + \cdots + u_\mu v_0 + \cdots\cdots \\ + u_0 v_1 + u_1 v_1 + \cdots + u_\mu v_1 + \cdots\cdots \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + u_0 v_\nu + u_1 v_\nu + \cdots + u_\mu v_\nu + \cdots\cdots \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \end{array}\right.$$

---

1) Dabei steht es selbstverständlich frei, bei der Formulierung des Satzes „Zeilen" und „Kolonnen" zu vertauschen.

welches ja die *Zeilen*summen $U \cdot v_0$, $U \cdot v_1, \cdots$, $U \cdot v_\nu, \cdots$ und als Summe der aus diesen gebildeten Reihe das Resultat $U \cdot V$ liefert, seine Konvergenzeigenschaften behält, falls man jedes Glied $u_\mu v_\nu$ durch seinen absoluten Betrag ersetzt. Alsdann ergibt sich aber nach dem Satze der vorigen Nummer unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung (18) durch Summation nach *Diagonalen*.

## § 59. Kriterien für *effektive*, d. h. eventuell nur bedingte Konvergenz. — Alternierende Reihen. — Abelsche Transformation und darauf beruhende Konvergenzkriterien. — Dirichletsche Reihen. — Ein Grenzwertsatz.

1. Wir wollen eine Reihe, von der nur soviel feststeht, daß sie *überhaupt konvergiert*, als *effektiv konvergent* bezeichnen: eine solche Reihe kann dann möglicherweise *absolut divergent* sein, sie braucht also nur *bedingt* zu *konvergieren*.

Es entsteht nun die Frage: Gibt es *allgemeine* Kriterien, um die *effektive Konvergenz* einer Reihe zu erkennen, falls deren *absolute Divergenz* bereits feststeht oder wenigstens ihre *absolute Konvergenz* nicht ermittelt werden kann.

Diese Frage ist aber zu *verneinen*, und zwar nicht nur in *dem* Sinne, daß es *bisher* nicht gelungen ist, Kriterien von ähnlicher Allgemeinheit wie für *absolute* Konvergenz und Divergenz aufzufinden, sondern mit dem ausdrücklichen Bemerken, daß diese *Möglichkeit* durch die Natur des fraglichen Problems wohl als ausgeschlossen erscheinen dürfte.

Einige besondere Fälle, in denen sich die *effektive* Konvergenz einer (möglicherweise *absolut* divergenten) Reihe wirklich allemal feststellen läßt, sollen jetzt näher betrachtet werden.[1])

2. Für sogenannte *alternierende* Reihen, d. h. solche, deren Glieder *abwechselnd positive* und *negative* Zahlen sind, gilt der folgende Satz:

*Ist* $a_\nu \geqq a_{\nu+1} > 0$, $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = 0$, *so konvergiert die Reihe* $\sum_0^\infty (-1)^\nu \cdot a_\nu$, *also die Reihe:*

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2\nu} - a_{2\nu+1} + \cdots\cdots.$$

Beweis. Setzt man wiederum allgemein: $\sum_0^n (-1)^\nu \cdot a_\nu = s_n$, so wird:

$$\begin{aligned}(1)\qquad s_{2m+1} &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2m} - a_{2m+1} \\ &= (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2m} - a_{2m+1}).\end{aligned}$$

1) Ein weiterer Fall, der an die Lehre von den unendlichen Produkten anknüpft, findet sich § 85, Nr. 3.

Da jede Klammergröße $\geqq 0$ ist, so erkennt man, daß $s_{2m+1}$ *positiv* ist und mit wachsenden Werten von $m$ *niemals abnimmt.* Insbesondere hat man:

(2) $$s_{2m+1} \geqq a_0 - a_1.$$

Bringt man sodann den Ausdruck (1) auf die Form:

(3) $$s_{2m+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - \cdots - (a_{2m-1} - a_{2m}) - a_{2m+1},$$

so folgt andererseits, daß für jedes $m$:

(4) $$s_{2m+1} \leqq a_0.$$

Man hat also:

$$a_0 - a_1 \leqq s_{2m+1} \leqq a_0,$$

und da $s_{2m+1}$ *monoton* ist, so muß für $m \to \infty$ ein bestimmter Grenzwert existieren, etwa:

(5) $$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = s \quad (\text{wo offenbar: } a_0 - a_1 \leqq s \leqq a_0).$$

Da ferner:

$$s_{2m+1} = s_{2m} - a_{2m+1},$$

so ergibt sich, daß auch:

(6) $$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = \lim_{m\to\infty} s_{2m+1} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = s$$

wird, d. h. man hat allgemein:

(7) $$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \quad \text{q. e. d.}$$ [1]

3. Hiernach ist z. B. die harmonische Reihe mit alternierenden Vorzeichen $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}$ *konvergent* und zwar *bedingt*, da $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu}$ *divergiert.* Übrigens kann man die Summe dieser Reihe mit Hilfe der früher abgeleiteten Beziehung (§ 34, Gl. (7) und (13)):

(8) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{1}{\nu} - \lg n\right) = \gamma \quad (\text{d. h. endlich und bestimmt})$$

---

1) Man kann mit Benützung des in Ungl. (2) und (4) enthaltenen Prinzipes etwas kürzer auch folgendermaßen schließen. Es ist:

$$s_{n+\varrho} - s_n = (-1)^{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{\varrho-1} a_{n+\varrho})$$

und, da die Klammergröße offenbar wesentlich positiv ist:

$$|s_{n+\varrho} - s_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{\varrho-1} a_{n+\varrho} < a_{n+1},$$

sodaß also $|s_{n+\varrho} - s_n|$ durch Wahl von $n$ *beliebig klein* wird und somit die betreffende Reihe *konvergiert.*

leicht berechnen. Man findet nämlich durch identische Umformung:

$$\sum_{1}^{2m} \nu \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} = \sum_{1}^{2m} \nu \frac{1}{\nu} - 2 \sum_{1}^{m} \nu \frac{1}{2\nu}$$

$$= \left(\sum_{1}^{2m} \nu \frac{1}{\nu} - \lg 2m\right) - \left(\sum_{1}^{m} \nu \frac{1}{\nu} - \lg m\right) + \lg 2$$

(wegen: $\lg 2m - \lg m = \lg 2$) und hieraus für $m \to \infty$:

$$\sum_{1}^{\infty} \nu \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} = \lg 2. \tag{9}$$ —

Die oben bewiesene Konvergenz der alternierenden Reihen ist besonders geeignet, um erkennen zu lassen, daß *das Maß der Gliederabnahme*, d. h. die *Geschwindigkeit*, mit welcher die absoluten Beträge der Glieder bei wachsender Stellenzahl der *Null* zustreben, für das Zustandekommen einer *bedingten* Konvergenz ohne Belang ist. Denn die Reihe $\sum (-1)^\nu \cdot a_\nu$ *konvergiert*, wie *langsam* auch die $a_\nu$ abnehmen mögen, sofern dies nur überhaupt *monoton* geschieht (so ist z. B. $\sum \frac{(-1)^\nu}{\lg_k \nu}$ *konvergent*). Dagegen ist gerade die *Monotonie* der Gliederabnahme für die Gültigkeit des betreffenden Konvergenzsatzes unumgänglich notwendig. Man darf also *nicht* etwa — analog wie bei der *absoluten* Konvergenz — schließen, daß gleichzeitig mit der Reihe $\sum (-1)^\nu \cdot a_\nu$ (wo: $a_\nu \geqq a_{\nu+1}$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$) auch die Reihe $\sum (-1)^\nu \cdot b_\nu$ *konvergiert*, sofern nur $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{b_\nu}{a_\nu} = 1$. Setzt man z. B. für $\nu = 1, 2, 3, \cdots$:

$$b_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu+1} + (-1)^\nu}, \tag{10}$$

also für $\mu = 1, 2, 3, \cdots$:

$$b_{2\mu-1} = \frac{1}{\sqrt{2\mu} - 1}, \quad b_{2\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1} + 1}, \tag{11}$$

so hat man $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{b_\nu}{a_\nu} = 1$, wenn $a_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$ gesetzt wird, folglich die Reihe $\sum (-1)^{\nu-1} \cdot a_\nu$ sicher *konvergiert*. Nichtsdestoweniger *divergiert* die Reihe $\sum (-1)^{\nu-1} \cdot b_\nu$, denn es ergibt sich:

$$\begin{aligned} b_{2\mu-1} - b_{2\mu} &= \frac{\sqrt{2\mu+1} - \sqrt{2\mu} + 2}{(\sqrt{2\mu} - 1)(\sqrt{2\mu+1} + 1)} \\ &> \frac{2}{(\sqrt{2\mu+1} - 1)(\sqrt{2\mu+1} + 1)} = \frac{1}{\mu} \end{aligned} \tag{12}$$

4. Ein überaus brauchbares Hilfsmittel zur Abschätzung gewisser Summen liefert eine von Abel herrührende identische Umformung, welche wir schlechthin als *die Abelsche Transformation*[1]) bezeichnen werden. Setzt man:

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_\nu = V_\nu \quad (\nu = 0, 1, \cdots, n), \tag{13}$$

also:

$$v_0 = V_0, \quad v_\nu = V_\nu - V_{\nu-1} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n), \tag{14}$$

so wird:

$$\begin{aligned}\sum_0^n{}^\nu u_\nu v_\nu &= u_0 V_0 + \sum_1^n{}^\nu u_\nu \quad (V_\nu - V_{\nu-1}) \\ &= u_0 V_0 + \sum_1^n{}^\nu u_\nu V_\nu - \sum_1^n{}^\nu u_\nu V_{\nu-1} \\ &= \sum_0^n{}^\nu u_\nu V_\nu - \sum_0^{n-1}{}^\nu u_{\nu+1} V_\nu,\end{aligned}$$

und es ergibt sich daher schließlich:

$$\sum_0^n{}^\nu u_\nu v_\nu = \sum_0^{n-1}{}^\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + u_n V_n \tag{15}$$

als die oben gemeinte Transformationsformel.[2])

Dieselbe kann offenbar unter Umständen zur Beurteilung der Konvergenz einer unendlichen Reihe von der Form $\sum_0^\infty{}^\nu u_\nu v_\nu$ dienen[3]), wenn

---

1) Sie wird von anderen auch *partielle Summation* genannt. In Wahrheit lassen sich wohl *alle* bekannten Sätze über lediglich *effektive* Konvergenz auf diese Transformation zurückführen. Dies gilt z. B. auch von dem Satze in Nr. 2 über alternierende Reihen (vgl. Nr. 5).

2) Zuweilen ist es zweckmäßig, der Gleichung (15) die folgende Form zu geben:

$$\sum_0^n{}^\nu u_\nu v_\nu = \sum_0^n{}^\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + u_{n+1} V_n.$$

Dabei kann die (auf der linken Seite der Gleichung ja gar nicht vorkommende) Zahl $u_{n+1}$ *ganz willkürlich* angenommen werden, da die einzig damit behafteten Glieder der rechten Seite, nämlich $-u_{n+1} V_n$ und $+u_{n+1} V_n$ sich gegenseitig aufheben.

3) Ist die Reihe $\sum v_\nu$ *absolut* konvergent, so gilt das gleiche von der Reihe $\sum u_\nu v_\nu$, sofern die $|u_\nu|$ nur der Bedingung genügen, unter einer endlichen Schranke zu bleiben (vgl. S. 318, Fußn. 1). Etwas analoges findet offenbar nicht mehr statt, wenn $\sum v_\nu$ nur *bedingt* konvergiert.

die beiden *rechts* auftretenden Ausdrücke bestimmte Grenzwerte für $n \to \infty$ besitzen. Alsdann wird:

$$(16) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu u_\nu v_\nu = \sum_0^\infty {}^\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + \lim_{n\to\infty} u_n \cdot V_n,$$

und man erkennt hieraus, daß die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu u_\nu v_\nu$ sicher *konvergiert*, wenn die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu$ *konvergiert* und $\lim_{n\to\infty} u_n \cdot V_n$ eine *bestimmte Zahl* (inkl. 0) vorstellt. Hierzu ist aber *hinreichend*:

1) Daß $\sum_0^\infty {}^\nu (u_\nu - u_{\nu+1})$ *absolut* konvergiert und die absoluten Beträge der $V_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ stets unter einer *endlichen* Grenze bleiben.

2) Daß außerdem

*entweder*: (a) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ (in welchem Falle dann die $V_\nu$ keiner weiteren Bedingung zu genügen brauchen),

*oder*:[1]) (b) $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ (d. h. } \textit{von Null verschieden}) \\ \lim_{n\to\infty} V_n = V \text{ (d. h. } \textit{endlich} \text{ inkl. } \textit{Null}) \end{cases}$

(d. h. im Falle (b) muß die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu v_\nu$ geradezu *konvergieren*, während sie im Falle (a) auch innerhalb *endlicher* Grenzen *oszillieren* darf).

---

1) Man bemerke, daß in bezug auf $\lim_{n\to\infty} u_n$ infolge der Annahme 1) wirklich stets *einer* von diesen *beiden* Fällen eintreten *muß*. Da nämlich:

$$\sum_0^{n-1} {}^\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) = u_0 - u_n,$$

so erheischt schon die *effektive* (also um so mehr die *absolute*) *Konvergenz* der Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu (u_\nu - u_{\nu+1})$ die *Existenz* eines *bestimmten* $\lim_{n\to\infty} u_n$. Diese letztere Bedingung ist dann umgekehrt auch *hinreichend* für die *effektive*, aber noch nicht für die *absolute* Konvergenz von $\sum_0^\infty {}^\nu (u_\nu - u_{\nu+1})$.

Im Falle (a) folgt dann aus Gl. (16):

$$\sum_0^\infty{}^{\nu}\, u_\nu v_\nu = \sum_0^\infty{}^{\nu}\, (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu, \tag{17a}$$

im Falle (b):

$$\sum_0^\infty{}^{\nu}\, u_\nu v_\nu = \sum_0^\infty{}^{\nu}\, (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + u \cdot V. \tag{17b}$$

Dabei konvergiert die *rechts* stehende Reihe auf Grund der gemachten Annahme *absolut*, also auch *unbedingt*, während für die Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, u_\nu v_\nu$ aus Gl. (17a) oder (17b) lediglich die *effektive (möglicherweise* also nur *bedingte) Konvergenz in der durch die Indizes vorgeschriebenen Anordnung* erschlossen werden kann

Man kann dieses Resultat zu dem folgenden Satze zusammenfassen:

*Ist $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, (u_\nu - u_{\nu+1})$ absolut und $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, v_\nu$ effektiv konvergent, so konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, u_\nu v_\nu$ zum mindesten in der durch die Indizes vorgeschriebenen Anordnung. Dies gilt im Falle $\lim_{\nu\to\infty} u_\nu = 0$ auch dann noch, wenn $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, v_\nu$ innerhalb endlicher Grenzen oszilliert.*

5. Die zur Gültigkeit dieses Satzes erforderliche Konvergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, |u_\nu - u_{\nu+1}|$ ist sicher dann vorhanden, wenn die $u_\nu$ eine *monotone* Folge bilden und $\lim_{\nu\to\infty} u_\nu$ *nicht unendlich* ist. Denn aus der letzteren Annahme folgt zunächst die *effektive Konvergenz* von $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, (u_\nu - u_{\nu+1})$, und diese ist dann *eo ipso* eine *absolute*, da die Differenzen $(u_\nu - u_{\nu+1})$ wegen der *Monotonie* der $u_\nu$ *durchweg* $\geqq 0$ oder *durchweg* $\leqq 0$ sind. Man gewinnt auf diese Weise den folgenden Spezialsatz:

*Ist $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, v_\nu$ konvergent, so konvergiert $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, u_\nu v_\nu$, wenn die die Folge der $u_\nu$ monoton und $\lim_{\nu\to\infty} u_\nu$ nicht unendlich ist. Oszilliert $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, v_\nu$ innerhalb endlicher Grenzen, so konvergiert*

$\sum_0^\infty{}_\nu u_\nu v_\nu$, *wenn zur Monotonie der* $u_\nu$ *noch die Bedingung* $\lim_{\nu\to\infty} u_\nu = 0$ *hinzukommt.*

Man erkennt leicht, daß der in Nr. 2 bewiesene Satz über die Konvergenz einer Reihe von der Form: $\sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot a_\nu$, wo: $a_\nu \geqq a_{\nu+1} > 0$, $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ als spezieller Fall in dem zweiten Teile des eben ausgesprochenen Satzes enthalten ist. Man hat nämlich nur zu setzen: $u_\nu = a_\nu$, $v_\nu = (-1)^\nu$, wobei dann $\sum_0^\infty{}_\nu v_\nu$ in den Grenzen 0 und 1 oszilliert.

Zugleich aber gewinnt man auf diesem Wege die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Nr. 2:

*Ist* $a_\nu \geqq a_{\nu+1} > 0$, $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, $m_\nu$ *beliebig ganzzahlig, so konvergiert* $\sum_0^\infty{}_\nu (-1)^{m_\nu} \cdot a_\nu$, *wenn* $\sum_0^\infty{}_\nu (-1)^{m_\nu}$ *zwischen endlichen Grenzen oszilliert, d. h. falls die Differenz zwischen der Anzahl der in* $\sum_0^n{}_\nu (-1)^{m_\nu} \cdot a_\nu$ *enthaltenen positiven und negativen Glieder für jedes noch so große n numerisch unter einer gewissen positiven Zahl bleibt.*[1])

6. Wenn $\sum_0^\infty{}_\nu |u_\nu - u_{\nu+1}|$ *konvergiert,* so ist die *Endlichkeit* von $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} V_\nu$ eine zwar *hinreichende,* aber *keineswegs notwendige* Bedingung für die *Konvergenz* von $\sum_0^\infty{}_\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu$. Vielmehr: wie *schwach* auch $\sum_0^\infty{}_\nu |u_\nu - u_{\nu+1}|$ *konvergieren* mag, so gibt es ja stets noch *schwächer konvergierende* Reihen, d. h. *konvergente* Reihen von der Form: $\sum_0^\infty{}_\nu |u_\nu - u_{\nu+1}| \cdot V_\nu$, wo: $\lim_{\nu\to\infty} V_\nu = +\infty$ (§ 49, Gl. (9), S. 332; Gl. (13), S. 333).

Hieraus folgt aber, daß die Transformationsgleichung (16) auch dann noch zur Erschließung der *Konvergenz* von $\sum_0^\infty{}_\nu u_\nu v_\nu$ dienen kann, wenn

---

1) Diese Bedingung ist *hinreichend,* aber noch keinesfalls *notwendig* (s. Nr. 6).

$\sum_0^\infty {}^\nu v_\nu$ zwar *eigentlich divergiert* oder innerhalb *unendlicher* Grenzen oszilliert, sofern nur $\lim_{\nu\to\infty} |V_\nu|$ lediglich *in geeigneter Weise unendlich* wird.

Wir wollen diese Eventualität für den Fall positiver, *monoton* gegen *Null* konvergierender $u_\nu$ etwas näher untersuchen. Alsdann mag gesetzt werden:

$$u_\nu = \frac{1}{M_\nu} \tag{18}$$

(wo $M_\nu$ wiederum die frühere typische Bedeutung hat, d. h. $M_\nu \leqq M_{\nu+1}$, $\lim_{\nu\to\infty} M_\nu = \infty$), sodaß Gl. (16) die folgende Form annimmt:

$$\sum_0^\infty {}^\nu \frac{v_\nu}{M_\nu} = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} \cdot M_\nu} \cdot V_\nu + \lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{M_n}. \tag{19}$$

Man kann nun hier zunächst eine sehr einfache und an die Gleichung (19) sich äußerst bequem anschließende *notwendige* Bedingung für die *Konvergenz* von $\sum_0^\infty {}^\nu \frac{v_\nu}{M_\nu}$ angeben. Setzt man nämlich in § 45, S. 309, Gl. (15): $u_\nu = \frac{v_\nu}{M_\nu}$, $b_\nu = M_\nu$, so ergibt sich die Beziehung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{M_n} = 0 \tag{20}$$

als *notwendige* Bedingung für die *Konvergenz* von $\sum \frac{v_\nu}{M_\nu}$. Darnach findet man also mit Rücksicht auf Gl. (19) zunächst folgendes:

*Ist* $\sum_0^\infty {}^\nu \frac{v_\nu}{M_\nu}$ *überhaupt konvergent und* $v_0 + v_1 + \cdots + v_\nu = V_\nu$, *so hat man allemal:*

$$\sum_0^\infty {}^\nu \frac{v_\nu}{M_\nu} = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} \cdot M_\nu} \cdot V_\nu, \tag{21}$$

und die Konvergenz dieser letzteren Reihe zieht andererseits diejenige von $\sum_0^\infty {}^\nu \frac{v_\nu}{M_\nu}$ nach sich.

Nun *konvergiert* nach § 49, S. 333, Gl. (13) (wenn man daselbst $\nu$ durch $\nu + 1$ ersetzt) die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} \cdot M_\nu^\varrho} \quad \text{für jedes (noch so kleine) } \varrho > 0.$$

Daraus folgt weiter, daß auch noch die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$\frac{M_{\nu+1}-M_\nu}{M_{\nu+1}\cdot M_\nu^\varrho}\cdot(\lg M_\nu)^p \quad \text{für jedes (noch so große) } p>0$$

*konvergiert*. Man erkennt dies unmittelbar, wenn man setzt:

$$\frac{M_{\nu+1}-M_\nu}{M_{\nu+1}\cdot M_\nu^\varrho}\cdot(\lg M_\nu)^p = \frac{M_{\nu+1}-M_\nu}{M_{\nu+1}\cdot M_\nu^{\frac{1}{2}\varrho}}\cdot\frac{(\lg M_\nu)^p}{M_\nu^{\frac{1}{2}\varrho}}$$

und beachtet, daß der letzte Faktor rechts für $\nu\to\infty$ den Grenzwert 0 besitzt (s. § 38, S. 240, Gl. (2)). Bringt man also das allgemeine Glied der in Gl. (21) rechts auftretenden Reihe auf die Form:

$$\frac{M_{\nu+1}-M_\nu}{M_{\nu+1}\cdot M_\nu}\cdot V_\nu = \left(\frac{M_{\nu+1}-M_\nu}{M_{\nu+1}\cdot M_\nu^{1-\vartheta}}\cdot(\lg M_\nu)^p\right)\cdot\frac{V_\nu}{M_\nu^\vartheta\cdot(\lg M_\nu)^p},$$
$$\text{wo: } 0\leqq\vartheta<1,\ p<\infty,$$

so ergibt sich, daß die fragliche Reihe sicher *konvergiert*, wenn der *letzte* Faktor *numerisch unter einer endlichen Grenze bleibt*, d. h. wenn:

$$(22)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|V_n|}{M_n^\vartheta\cdot(\lg M_n)^p}<\infty$$

bei irgendeinem Werte $\vartheta<1$ und $p<\infty$.[1]) Man findet also den folgenden Satz:

*Für die Konvergenz der Reihe $\sum_0^\infty \frac{v_\nu}{M_\nu}$ bildet die Beziehung* (20) *eine notwendige, die Beziehung* (22) *eine hinreichende Bedingung. Ist die letztere erfüllt, so konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty \frac{v_\nu}{M_\nu}$ zum mindesten in der durch die Indizes vorgeschriebenen Anordnung gegen dieselbe Summe, wie die unbedingt konvergente Reihe $\sum_0^\infty \frac{M_{\nu+1}-M_\nu}{M_{\nu+1}\cdot M_\nu}\cdot V_\nu$.*

7. Schreibt man in dem eben gefundenen Resultate $m_\nu^\varrho$ statt $M_\nu$, wo $\varrho>0$ und $m_\nu$, also auch $m_\nu^\varrho$ geradeso wie $M_\nu$ monoton ins Unendliche wächst, so nimmt $\sum\frac{v_\nu}{M_\nu}$ die in zahlentheoretischen Untersuchungen häufig vorkommende, gewöhnlich als *Dirichletsche Reihe* bezeichnete Form

1) Man bemerke, daß alsdann die *notwendige* Konvergenzbedingung (20) *eo ipso* erfüllt ist.

$\sum \frac{v_\nu}{m_\nu^\varrho}$ an. Die *notwendige* Konvergenzbedingung (20) geht alsdann unmittelbar in die folgende über:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{m_n^\varrho} = 0, \tag{23}$$

die *hinreichende* (22) (wenn man beachtet, daß: $(\lg m_\nu^\varrho)^p = \varrho^p \cdot (\lg m_\nu)^p$ und die Bedingung (22) durch Multiplikation mit dem endlichen und von Null verschiedenen Faktor $\varrho^p$ nicht alteriert wird) in die folgende:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|V_n|}{m_n^\lambda \cdot (\lg m_n)^p} < \infty, \quad \text{wo:}\ 0 \leqq \lambda = \vartheta\varrho < \varrho. \tag{24}$$

Hieraus folgt schließlich noch, daß die Reihe $\sum \frac{v_\nu}{m_\nu^\varrho}$ bei *jedem noch so kleinen* $\varrho > 0$ konvergiert, wenn die Bedingung (24) schon für $\lambda = 0$ erfüllt ist; und daß das gleiche bezüglich der Reihe $\sum \frac{v_\nu}{m_\nu^{1+\varrho}}$ gilt, wenn die Bedingung (24) für $\lambda = 1$ besteht. Hiernach ergibt sich also noch der folgende speziellere Satz:

*Für die Konvergenz der Reihe $\sum \frac{v_\nu}{m_\nu^\varrho}$ bzw. $\sum \frac{v_\nu}{m_\nu^{1+\varrho}}$ bei jedem noch so kleinen Werte $\varrho > 0$ ist hinreichend, daß:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|V_n|}{(\lg m_n)^p} < \infty \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|V_n|}{m_n (\lg m_n)^p} < \infty, \tag{25}$$

*und man hat sodann:*

$$\sum_0^\infty \frac{v_\nu}{m_\nu^\varrho} = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{m_\nu^\varrho} - \frac{1}{m_{\nu+1}^\varrho}\right) V_\nu, \text{ bzw. } \sum_0^\infty \frac{v_\nu}{m_\nu^{1+\varrho}} = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{m_\nu^{1+\varrho}} - \frac{1}{m_{\nu+1}^{1+\varrho}}\right) V_\nu. \tag{26}$$

8. Als eine weitere nützliche Anwendung der *Abelschen Transformation* wollen wir noch den folgenden Grenzwertsatz beweisen:

*Ist $(a_\nu)$ eine beliebige Zahlenfolge, $\sum d_\nu$ eine divergente Reihe mit positiven, niemals zunehmenden Gliedern mit dem Grenzwert Null, also:*

$$d_\nu \geqq d_{\nu+1} > 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} d_\nu = 0, \quad \sum_1^\infty d_\nu = +\infty,$$

*und setzt man:*

$$\sum_1^n a_\nu = A_n, \quad \sum_1^n d_\nu = s_n, \quad \sum_1^n a_\nu d_\nu = S_n, \tag{27}$$

*so ist:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{s_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n}, \tag{28}$$

*falls der rechts stehende Grenzwert eine bestimmte Zahl ist.*

**Beweis.** Mit Benützung der Abelschen Transformation hat man (s. S. 416, Fußn. 2):

$$S_n = \sum_1^n {}^{\nu} A_\nu (d_\nu - d_{\nu+1}) + A_n d_{n+1} \tag{29}$$

und daher:

$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{1}{s_n} \sum_1^n {}^{\nu} A_\nu (d_\nu - d_{\nu+1}) + \frac{1}{s_n} \cdot A_n d_{n+1}. \tag{30}$$

Ersetzt man in Gl. (29) $a_\nu$ durch 1, also $A_\nu$ durch $\nu$, so folgt:

$$s_n = \sum_1^n {}^{\nu} \nu (d_\nu - d_{\nu+1}) + n\, d_{n+1}, \tag{31}$$

also:

$$\frac{s_n - n d_{n+1}}{\sum\limits^n {}^{\nu} \nu (d_\nu - d_{\nu+1})} = 1,$$

und es geht die Gleichung (30), wenn man diesen Ausdruck dem ersten Gliede der rechten Seite als Faktor hinzufügt, in die folgende über:

$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{\sum\limits_1^n {}^{\nu} A_\nu (d_\nu - d_{\nu+1})}{\sum\limits_1^n {}^{\nu} \nu (d_\nu - d_{\nu+1})} - \frac{n\, d_{n+1}}{s_n} \left( \frac{\sum\limits_1^n {}^{\nu} A_\nu (d_\nu - d_{\nu+1})}{\sum\limits_1^n {}^{\nu} \nu (d_\nu - d_{\nu+1})} - \frac{A_n}{n} \right). \tag{32}$$

Um auf den rechts zweimal auftretenden Quotienten den Grenzwertsatz III von § 37, Nr. 3 (S. 229) anwenden zu können, hat man nur zu zeigen, daß die im Nenner stehende, mit wachsendem $n$ niemals abnehmende positive Summe für $n \to \infty$ selbst ins Unendliche wächst. Nun ist aber nach Gl. (31):

$$\sum_1^n {}^{\nu} \nu (d_\nu - d_{\nu+1}) = s_n - n\, d_{n+1} = \sum_1^n {}^{\nu} (d_\nu - d_{n+1}),$$

also für jedes $m < n$:

$$\sum_1^n {}^{\nu} \nu (d_\nu - d_{\nu+1}) \geqq \sum_1^m {}^{\nu} (d_\nu - d_{n+1}) = s_m - m\, d_{n+1}$$

und daher (wegen: $\lim\limits_{n \to \infty} d_{n+1} = 0$):

$$\lim_{n \to \infty} \sum_1^n {}^{\nu} \nu (d_\nu - d_{\nu+1}) \geqq s_m, \quad \text{d. h.} \quad = +\infty,$$

da ja $s_m$ infolge der Divergenz von $\sum d_\nu$ durch Wahl von $m$ beliebig

groß gemacht werden kann. Somit findet man mit Benützung des oben erwähnten Grenzwertsatzes:

$$(33)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_1^n{}^{\nu} A_\nu(d_\nu - d_{\nu+1})}{\sum_1^n{}^{\nu}\, \nu(d_\nu - d_{\nu+1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{A_n(d_n - d_{n+1})}{n(d_n - d_{n+1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n},$$

sofern der letzte Grenzwert überhaupt *existiert*. Fällt derselbe überdies *endlich* aus, so verschwindet für $n \to \infty$ das letzte Glied der rechten Seite von Gl. (32) (da ja $\frac{n d_{n+1}}{s_n} < 1$), und man findet somit, wie behauptet:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{s_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n}.$$

## § 60. Genauere Untersuchung der Wertveränderungen bedingt konvergenter Reihen.

1. Wie in § 57 gezeigt wurde, läßt sich *jede bedingt* konvergente Reihe auffassen als hervorgegangen aus der Vereinigung *zweier divergenter* Reihen $\sum a_\nu$, $\sum(-b_\nu)$; und umgekehrt kann man durch passende Einschiebung der Zahlen $-b_1, -b_2, -b_3, \cdots$ in die Reihe der Zahlen $a_1$, $a_2, a_3, \cdots$ eine *bedingt konvergente* Reihe mit *vorgeschriebener Summe* oder auch eine *divergente* Reihe erzeugen.

Um den Einfluß der *Gliederanordnung* auf die Summe einer solchen Reihe etwas genauer festzustellen, wollen wir zunächst den besonderen Fall betrachten, daß $b_\nu = a_\nu$ (für $\nu = 1, 2, 3, \cdots$).

Sei also: $a_\nu > 0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ und $\sum\limits_1^\infty{}^{\nu} a_\nu = \infty$. Ordnet man zunächst jedem *positiven* Gliede $a_\nu$ das entsprechende *negative* zu, d. h. bildet man die Reihe:

$$a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \cdots + a_\nu - a_\nu + \cdots\cdots,$$

so *konvergiert* dieselbe offenbar gegen den Wert 0, in Zeichen:

$$(1)\qquad \sum_2^\infty{}^{\nu}(-1)^\nu \cdot a_{\left[\frac{\nu}{2}\right]} = 0,$$ [1]

oder anders geschrieben:

$$(2)\qquad \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_1^\nu{}^{\varkappa} a_\varkappa - \sum_1^{\nu'}{}^{\varkappa} a_\varkappa\right) = 0 \quad \text{für: } \nu' = \nu - 1 \text{ und } \nu' = \nu.$$

---

1) Das Zeichen $[x]$ bedeutet, wie schon bei früherer Gelegenheit die größte ganze Zahl, die $\leq x$.

Jetzt wähle man zwei unbegrenzte Folgen beständig *wachsender* natürlicher Zahlen $(p_1, p_2, p_3, \cdots)$, $(n_1, n_2, n_3, \cdots)$ und bilde aus den Gliedern $(a_\nu)$, $(-a_\nu)$ — genau wie beim Beweise des **Riemannschen** Satzes in § 57, Nr. 2 (S. 403) — die folgende unendliche Reihe:

$$(3)\qquad \sum_{1}^{p_1}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa - \sum_{1}^{n_1}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa + \sum_{p_1+1}^{p_2}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa - \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa + \cdots + \sum_{p_{\nu-1}+1}^{p_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa - \sum_{n_{\nu-1}+1}^{n_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa + \cdots$$

oder, indem man noch $p_0 = n_0 = 0$ setzt, kürzer geschrieben:

$$(3\text{a})\qquad \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left( \sum_{p_{\nu-1}+1}^{p_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa - \sum_{n_{\nu-1}+1}^{n_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa \right).$$

Bezeichnet man die Summe der ersten $\mu$ Glieder (jeden einzelnen Summanden $\pm a_\varkappa$ als ein Glied gerechnet) mit $s_\mu$, so ist insbesondere:

$$(4)\qquad s_{p_\nu + n_\nu} = \sum_{1}^{p_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa - \sum_{1}^{n_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa, \quad \text{d. h.} \begin{cases} = \displaystyle\sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa, & \text{wenn: } p_\nu > n_\nu, \\ = -\displaystyle\sum_{p_\nu+1}^{n_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa, & \text{wenn: } p_\nu < n_\nu. \end{cases}$$

2. Angenommen, es sei nun:

$$(5)\qquad \lim_{\nu\to\infty} s_{p_\nu + n_\nu} = s \quad (\text{wo } s \text{ eine bestimmte Zahl}),$$

so folgt zunächst nur soviel, daß die Reihe (3) gegen die Summe $s$ *konvergiert*, wenn man je eine *Gruppe* von Summanden:

$$(6)\qquad \left( \sum_{p_{\nu-1}+1}^{p_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa - \sum_{n_{\nu-1}+1}^{n_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa \right) = A_\nu$$

als *ein* Glied der Reihe auffaßt. Dabei wird also:

$$(7)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \left( \sum_{p_{\nu-1}+1}^{p_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa - \sum_{n_{\nu-1}+1}^{n_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa \right) = \lim_{\nu\to\infty} A_\nu = 0.$$

Bedeutet dann $\mu$ eine *beliebige zwischen* $p_{\nu-1} + n_{\nu-1}$ und $p_\nu + n_\nu$ liegende ganze Zahl, so hat man offenbar:

$$(8)\qquad s_\mu \begin{cases} \leqq s_{p_{\nu-1}+n_{\nu-1}} + \displaystyle\sum_{p_{\nu-1}+1}^{p_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa, \\ > s_{p_\nu + n_\nu} - \displaystyle\sum_{p_{\nu-1}+1}^{p_\nu}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa, \end{cases}$$

und daher:

(9) $$\lim_{\mu \to} s_\mu = s$$

falls:

(10) $$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{p_{\nu-1}+1}^{p_\nu} {}_{\varkappa}\, a_\varkappa = 0.$$[1]

Kommt also die Bedingung (10) noch zu der Bedingung (5) hinzu, so *konvergiert* die Reihe (3) auch gegen die Summe $s$, wenn man die *einzelnen* Summanden $\pm a_\varkappa$ als die *Glieder* der Reihe auffaßt.

Ist dagegen $\lim\limits_{\nu \to \infty} \sum\limits_{p_{\nu-1}+1}^{p_\nu} {}_{\varkappa}\, a_\varkappa = L$, d. h. *von Null verschieden* (endlich oder unendlich groß), so *oszilliert* die Reihe (3) in den Grenzen $s$ und $s + L$. Sie läßt sich dann aber zu einer *konvergenten* machen, wenn man noch die Summanden $\pm a_\varkappa$ *innerhalb der einzelnen Gruppen* $A_\nu$ in passender Weise anordnet. Daß dies allemal möglich ist, zeigt eine ganz analoge Überlegung, wie die beim Beweise des Riemannschen Satzes angestellte, wenn man nur berücksichtigt, daß $\lim\limits_{\varkappa \to \infty} a_\varkappa = 0$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} A_\nu = 0$. —

Besteht andererseits *keine* Beziehung von der Form (5), d. h. ist entweder $\lim\limits_{\nu \to \infty} s_{p_\nu + n_\nu} = \pm \infty$ oder sind $\underline{\lim}_{\nu \to \infty} s_{p_\nu + n_\nu}$ und $\overline{\lim}_{\nu \to \infty} s_{p_\nu + n_\nu}$ voneinander verschieden, so *divergiert* offenbar die Reihe (3).

3. Die *Summe* bzw. die *Konvergenz* oder *Divergenz* einer Reihe von der Form (3) hängt also wesentlich ab von der Beschaffenheit eines gewissen *Partialrestes* der *divergenten* Reihe $\sum a_\nu$, nämlich: $\sum\limits_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}_{\varkappa}\, a_\varkappa$ bzw. $\sum\limits_{p_\nu+1}^{n_\nu} {}_{\varkappa}\, a_\varkappa$ für $\nu \to \infty$. Die Untersuchung solcher Partialreste läßt sich aber in vielen Fällen mit Hilfe des folgenden Satzes vereinfachen:

*Ist:* $a_\varkappa > 0$, $a_\varkappa' \cong a_\varkappa$, *so wird:*

(11) $$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}_{\varkappa}\, a_\varkappa' = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}_{\varkappa}\, a_\varkappa \quad (\text{wo: } p_\nu > n_\nu,\ \lim_{\nu \to \infty} n_\nu = \infty),$$

---

1) Daraus folgt dann vermöge der Beziehung (7), daß auch:

(10a) $$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{n_{\nu-1}+1}^{n_\nu} {}_{\varkappa}\, a_\varkappa = 0$$

wird, und umgekehrt zieht auch diese letztere Gleichung die Gleichung (10) nach sich. Die Konvergenzbedingung (10) bzw. (10a) ist sicher allemal erfüllt, wenn jede Gliedergruppe $A_\nu$ zum mindesten die *eine* Gattung von Gliedern (d. h. entweder die positiven oder die negativen) in *stets unter einer festen Schranke bleibender* Anzahl enthält.

*falls einer dieser Grenzwerte eine bestimmte Zahl* $\geqq 0$ *vorstellt oder unendlich groß wird.*

*Ist:* $a_\varkappa > 0$, $a_\varkappa' \prec a_\varkappa$, *so wird:*

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa' = 0, \quad \textit{falls:}\ \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa < \infty. \tag{12}$$

*Ist:* $a_\varkappa' \succ a_\varkappa$, *so wird:*

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa' = \infty, \quad \textit{falls:}\ \underline{\lim_{\nu\to\infty}} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa \dot{>} 0. \tag{13}$$

Beweis. Man hat:

$$\sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa' = \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, \frac{a_\varkappa'}{a_\varkappa} \cdot a_\varkappa \begin{cases} > g_\nu \cdot \sum\limits_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa, \\ < G_\nu \cdot \sum\limits_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa, \end{cases} \tag{14}$$

wenn $g_\nu$ die *kleinste*, $G_\nu$ die *größte* unter den Zahlen $\frac{a_\varkappa'}{a_\varkappa}$ für $\varkappa = n_\nu + 1$, $n_\nu + 2, \cdots, p_\nu$ bedeutet. Ist nun $a_\varkappa' \cong a_\varkappa$, so wird $\lim\limits_{\nu\to\infty} g_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} G_\nu = 1$, und daher:

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a'_\varkappa = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa \quad \text{(Gl. (11)).[1]}$$

Ist $a_\varkappa' \prec a_\varkappa$, so wird $\lim\limits_{\nu\to\infty} G_\nu = 0$ und daher auch:

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa' = 0 \quad \text{(Gl. (12))},$$

wenn $\sum\limits_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa$ *unter* einer endlichen Zahl bleibt.

---

1) Man kann dieser Gleichung auch die Form geben:

$$\sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa' \cong \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa. \tag{11a}$$

Dies ist ohne weiteres klar, falls jene Grenzwerte *endlich* und *von Null verschieden* ausfallen. Die Richtigkeit der Formel (11a) bleibt aber auch bestehen, falls jene Grenzwerte *verschwinden* oder *unendlich groß* werden, wie unmittelbar erkannt wird, wenn man Ungl. (14) auf die Form bringt:

$$\frac{\sum\limits_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa'}{\sum\limits_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa\, a_\varkappa} \begin{cases} > g_\nu \\ < G_\nu. \end{cases}$$

Ist dagegen $a_x' > a_x$, also $\lim_{\nu\to\infty} g_\nu = \infty$, so wird:

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}^x a_x' = \infty \quad \text{(Gl. (13))},$$

wenn $\sum_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}^x a_x$ *über* einer positiven Zahl bleibt.

4. Der soeben bewiesene Satz lehrt, daß der Grenzwert eines solchen Partialrestes $\sum_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}^x a_x$ und somit *die Summe der Reihe* (3) gar nicht von dem speziellen Bildungsgesetze der $a_x$ für *endliche* Werte von $x$, sondern lediglich davon abhängt, in welcher Weise die $a_x$ für $x \to \infty$ der Null zustreben. Und wenn es nur gelingt, zu einer divergenten Reihe $\sum a_x$ eine möglichst einfach konstruierte, monoton ins Unendliche wachsende Zahlenfolge $M_x$ von der Beschaffenheit anzugeben, daß:

$$a_x \cong M_x - M_{x-1} \tag{15}$$

(d. h. es braucht für *keinen endlichen* Wert von $x$ die *Gleichung* $a_x = M_x - M_{x-1}$ zu bestehen), so findet man unmittelbar (Gl. (11)):

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}^x a_x = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}^x (M_x - M_{x-1}) = \lim_{\nu\to\infty} (M_{p_\nu} - M_{n_\nu}), \tag{16}$$

falls der letzte Grenzwert existiert, oder, anders geschrieben (Gl. (11a)):

$$\sum_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}^x a_x \cong M_{p_\nu} - M_{n_\nu}, \tag{16a}$$

und man gewinnt auf diese Weise ein Mittel zur zweckmäßigen Berechnung des fraglichen Grenzwertes.

Man hat z. B. (§ 38, S. 247, Gl. (35)):

$$\frac{1}{x} \cong \lg x - \lg(x-1), \tag{17}$$

$$\frac{1}{x \lg x} \cong \lg_2 x - \lg_2(x-1), \tag{18}$$

und daher:

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}^x \frac{1}{x} = \lim_{\nu\to\infty} \lg \frac{p_\nu}{n_\nu} = \lg\left(\lim_{\nu\to\infty} \frac{p_\nu}{n_\nu}\right) \quad \text{(§ 37, S. 234, Gl (30))}, \tag{19}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}^x \frac{1}{x \lg x} = \lim_{\nu\to\infty} \lg \frac{\lg p_\nu}{\lg n_\nu} = \lg\left(\lim_{\nu\to\infty} \frac{\lg p_\nu}{\lg n_\nu}\right). \tag{20}$$

Ferner ist identisch:

$$M_\varkappa^\varrho - N_\varkappa^\varrho = M_\varkappa^\varrho \cdot \frac{1-\left(\frac{N_\varkappa}{M_\varkappa}\right)^\varrho}{1-\frac{N_\varkappa}{M_\varkappa}} \cdot \frac{M_\varkappa - N_\varkappa}{M_\varkappa}.$$

Ist nun $M_\varkappa \cong N_\varkappa$, so wird (§ 37, S. 236, Gl. (37)):

$$\lim_{\varkappa\to\infty} \frac{1-\left(\frac{N_\varkappa}{M_\varkappa}\right)^\varrho}{1-\frac{N_\varkappa}{M_\varkappa}} = \varrho$$

und daher:

(21) $$M_\varkappa^\varrho - N_\varkappa^\varrho \cong \varrho \cdot \frac{M_\varkappa - N_\varkappa}{M_\varkappa^{1-\varrho}} \quad \left(\cong \varrho \cdot \frac{M_\varkappa - N_\varkappa}{N_\varkappa^{1-\varrho}}\right).$$

Setzt man jetzt: $M_\varkappa = \varkappa$, $N_\varkappa = \varkappa - 1$, so folgt:

(22) $$\frac{1}{\varkappa^{1-\varrho}} \cong \frac{1}{\varrho} \cdot \{\varkappa^\varrho - (\varkappa-1)^\varrho\}$$

und daher:

(23) $$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa^{1-\varrho}} = \frac{1}{\varrho} \lim_{\nu\to\infty} (p_\nu^\varrho - n_\nu^\varrho).$$ [1])

5. Die Gleichungen (19), (20) und (23) lassen unmittelbar erkennen, welchen Bedingungen die $p_\nu$, $n_\nu$ genügen müssen, damit die Grenzwerte der betreffenden Partialreste *endlich und von Null verschieden* ausfallen, bzw. *Null* oder *unendlich groß* werden. So wird $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}$ nach Gl. (19)

---

1) Man hätte dieses Resultat auch unmittelbar aus der früher bewiesenen Beziehung (§ 51, S. 349, Gl. (32)):

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_1^n{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa^{1-\varrho}} - \frac{n^\varrho}{\varrho} \right\} = \gamma^{(\varrho)}$$

herleiten können, indem man $n$ die Werte $p_\nu$, $n_\nu$ beilegt und die entsprechenden Gleichungen voneinander subtrahiert.

Das analoge gilt bezüglich der Gleichungen (19), (20) und der Beziehungen:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_1^n{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} - \lg n \right\} = \gamma,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_2^n{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa \cdot \lg \varkappa} - \lg_2 n \right\} = \gamma_1$$

(s. § 34, S. 208, Gl. (13) und § 51, S. 347, Gl. (23)).

dann und nur dann einen *bestimmten positiven* Wert besitzen, wenn $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{p_\nu}{n_\nu}=g>1$ ist. Man erzielt dies, wenn man z. B. setzt:

$$p_\nu = p\cdot\nu,\quad n_\nu = n\cdot\nu, \tag{24}$$

wo $p$, $n$ zwei *positive ganze* Zahlen bedeuten und $p>n$ ist. Alsdann ergibt sich:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{n\nu+1}^{p\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}=\lg\frac{p}{n}\quad\left(=\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{1}^{p\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}-\sum_{1}^{n\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}\right)\right) \tag{25}$$

oder, anders geschrieben (s. Gl. (3a), (4)):

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\sum_{p(\nu-1)+1}^{p\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}-\sum_{n(\nu-1)+1}^{n\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}\right)=\lg\frac{p}{n}\,. \tag{26}$$

Dabei *konvergiert* diese Reihe, auch wenn man die einzelnen Summanden $\pm\frac{1}{\varkappa}$ als deren Glieder auffaßt, da: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sum\limits_{p(\nu-1)+1}^{p\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}\leq\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{p}{p(\nu-1)}=0$, also die Konvergenzbedingung (10) erfüllt ist.

Hätte man $p<n$ angenommen, so würde sich nach Gl. (4) der Grenzwert: $-\lim\limits_{\nu\to\infty}\sum\limits_{p\nu+1}^{n\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}=-\lg\frac{n}{p}$ als Summe der entsprechenden Reihe ergeben haben. Da aber $-\lg\frac{n}{p}=\lg\frac{p}{n}$, so kann man sagen, daß Gl. (26) auch für $p<n$ gültig bleibt. Da dies übrigens offenbar auch für $p=n$ der Fall ist (wegen: $\lg\frac{p}{p}=\lg 1=0$), so kann man folgenden Satz aussprechen:

*Bedeuten $p$, $n$ zwei beliebige positive ganze Zahlen, so resultiert eine konvergente Reihe mit der Summe* $\lg\frac{p}{n}$, *wenn man auf je $p$ Glieder der Reihe $\sum\limits_{1}^{\infty}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}$ je $n$ Glieder der Reihe $\sum\limits_{1}^{\infty}{}_{\varkappa}\left(-\frac{1}{\varkappa}\right)$ folgen läßt.*

6. Da bei einer Anordnung der eben betrachteten Art allemal der *Logarithmus einer rationalen Zahl*, also eine *besondere Form einer Irrationalzahl* zum Vorschein kommt, so entsteht noch die Frage: Wie sind die ganzen Zahlen $p_\nu$, $n_\nu$ zu bestimmen, damit eine *beliebig vorgeschriebene rationale oder irrationale Zahl* $s$ als Summe der zugehörigen, aus den Termen $\pm\frac{1}{\varkappa}$ zu bildenden Reihe resultiert?

Nach Gl. (19) hat man, wenn $s$ eine *beliebige positive* Zahl vorstellt:

$$(27)\qquad \lim_{\nu\to\infty}\sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}=s,\quad \text{falls:}\ \lim_{\nu\to\infty}\frac{p_\nu}{n_\nu}=e^s.$$

Da nun offenbar:

$$(28)\qquad \lim_{\nu\to\infty}\frac{[e^s\cdot\nu]}{e^s\cdot\nu}=1,\quad \text{also:}\ \lim_{\nu\to\infty}\frac{[e^s\cdot\nu]}{\nu}=e^s$$

(wo wiederum das Symbol $[x]$ die größte in $x$ enthaltene ganze Zahl bedeutet), so wird der obigen Forderung genügt, wenn man setzt:

$$(29)\qquad p_\nu=[e^s\cdot\nu],\quad n_\nu=\nu,$$

d. h. man hat:

$$(30)\qquad \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{1}^{[e^s\cdot\nu]}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}-\sum_{1}^{\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}\right)=s,$$

oder, wenn man die linke Seite als unendliche Reihe schreibt:

$$(31)\qquad \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\sum_{[e^s\cdot(\nu-1)]+1}^{[e^s\cdot\nu]}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\nu}\right)=s.\text{[1]}$$

Um die Summe $-s$ zu erzeugen, hat man lediglich in Gl. (29) $p_\nu$ und $n_\nu$ zu vertauschen, und man erhält auf diese Weise:

$$(32)\qquad \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\frac{1}{\nu}-\sum_{[e^s\cdot(\nu-1)]+1}^{[e^s\cdot\nu]}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}\right)=-s,$$

wie ja übrigens auch ohne weiteres aus Gl. (31) hervorgeht.

Dieses Resultat läßt sich noch in folgender Weise verallgemeinern. Es seien $q_\varkappa$, $r_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,3,\cdots)$ zwei Zahlenfolgen von der Beschaffenheit, daß:

$$q_\varkappa>0,\quad \lim_{\varkappa\to\infty}q_\varkappa=q,\quad \text{d. h. \textit{endlich und von Null verschieden},}$$

während die $r_\varkappa$ nur der Bedingung zu genügen haben, daß ihre absoluten Beträge stets unter einer endlichen Grenze bleiben und $q_\varkappa\cdot\varkappa+r_\varkappa$ durchweg *von Null verschieden* ausfällt. Alsdann hat man:

$$\lim_{\varkappa\to\infty}\frac{\varkappa}{q_\varkappa\cdot\varkappa+r_\varkappa}=\frac{1}{q},$$

also:

$$(33)\qquad \frac{1}{q_\varkappa\cdot\varkappa+r_\varkappa}\cong\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{\varkappa}.$$

1) Die *Konvergenz* dieser Reihe ist ohne weiteres evident, da jede Gliedergruppe nur *ein* negatives Glied enthält — s. die Fußnote zu Gl. (10).

Daraus folgt aber mit Benützung des Satzes in Nr. 3 (Gl. (11)) und der Gleichungen (30), (31):

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\sum_{[e^{s}\cdot(\nu-1)]+1}^{[e^{s}\cdot\nu]}{}_{\varkappa}\,\frac{1}{q_{\varkappa}\cdot\varkappa+r_{\varkappa}}-\frac{1}{q_{\nu}\cdot\nu+r_{\nu}}\right)=\frac{s}{q},$$

oder, wenn man noch $s$ durch $qs$ ersetzt:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\sum_{[e^{qs}\cdot(\nu-1)]+1}^{[e^{qs}\cdot\nu]}{}_{\varkappa}\,\frac{1}{q_{\varkappa}\cdot\varkappa+r_{\varkappa}}-\frac{1}{q_{\nu}\cdot\nu+r_{\nu}}\right)=s. \tag{34}$$

Hiermit ist aber die Aufgabe: Aus den Gliedern zweier divergenter Reihen $\sum_{1}^{\infty}{}_{\varkappa}\, a_{\varkappa}$, $\sum_{1}^{\infty}{}_{\varkappa}(-b_{\varkappa})$ *eine bedingt konvergente Reihe mit vorgeschriebener Summe* $s$ zu bilden, für den speziellen Fall $a_{\varkappa}=b_{\varkappa}=\frac{1}{q_{\varkappa}\cdot\varkappa+r_{\varkappa}}$ *vollständig gelöst* (während der Riemannsche Satz des § 57 nur die *Existenz* einer solchen Lösung erweist).

7. Auch die bereits in Nr. 4, Gl. (20) und (23) behandelten Beispiele: $a_{\varkappa}=\frac{1}{\varkappa\lg\varkappa}$ und $a_{\varkappa}=\frac{1}{\varkappa^{1-\varrho}}$ sollen noch etwas genauer betrachtet werden. Da $\frac{1}{\varkappa\lg\varkappa}<\frac{1}{\varkappa}$, $\frac{1}{\varkappa^{1-\varrho}}>\frac{1}{\varkappa}$ $(0<\varrho<1)$, so folgt zunächst aus dem Satze von Nr. 3 (Gl. (12) und (13)), daß diejenigen Anordnungen, welche aus den Gliedern $\pm\frac{1}{\varkappa}$ eine *konvergente* Reihe *mit beliebiger von Null verschiedener Summe* erzeugen (Gl. (26) und (31)), bei den Gliedern $\pm\frac{1}{\varkappa\lg\varkappa}$ eine solche mit der *Summe Null*, bei den Gliedern $\pm\frac{1}{\varkappa^{1-\varrho}}$ eine nach $\pm\infty$ *divergierende* Reihe hervorbringen.

Im übrigen erkennt man aus Gl. (20), daß: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa\lg\varkappa}$ einen *bestimmten positiven* bzw. *negativen* Wert besitzt, wenn $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{\lg p_\nu}{\lg n_\nu}$ *existiert* und $>1$ bzw. $<1$ ausfällt. Setzt man z. B.:

$$p_\nu=\nu^{p},\quad n_\nu=\nu^{n}, \tag{35}$$

wo wiederum $p$, $n$ zwei positive ganze Zahlen bedeuten, so wird:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{\nu^{n}+1}^{\nu^{p}}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa\lg\varkappa}=\lg\frac{p}{n}\quad(p>n), \tag{36a}$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(-\sum_{\nu^{p}+1}^{\nu^{n}}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa\lg\varkappa}\right)=-\lg\frac{n}{p}=\lg\frac{p}{n}\quad(p<n). \tag{36b}$$

Daraus folgt, daß man *eine konvergente Reihe mit der Summe* $\lg \frac{p}{n}$ erhält, wenn man auf je $\nu^p$ ($\nu = 2, 3, 4, \cdots$) Glieder aus der Reihe $\sum_2^\infty {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa \lg \varkappa}$ je $\nu^n$ Glieder aus der Reihe $\sum_2^\infty {}_\varkappa \left(-\frac{1}{\varkappa \lg \varkappa}\right)$ folgen läßt. (NB. Man erkennt leicht, daß die Konvergenzbedingung (10): $\lim_{\nu\to\infty} \sum_{(\nu-1)^p+1}^{\nu^p} {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa \lg \varkappa} = 0$ wirklich erfüllt ist.) Und man kann durch eine ganz analoge Modifikation, wie in dem zuvor betrachteten Falle $a_\varkappa = \pm \frac{1}{\varkappa}$, eine Reihe mit beliebig vorgeschriebener Summe $s$ erzeugen. —

Was schließlich den Fall: $a_\varkappa = \frac{1}{\varkappa^{1-\varrho}}$ $(0 < \varrho < 1)$ betrifft, so lehrt Gl. (23), daß: $\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa^{1-\varrho}}$ *höchstens* dann einen *endlichen* Wert besitzen kann, wenn:

$$(37) \qquad p_\nu \cong n_\nu .$$

Machen wir nun diese Voraussetzung, so geht Gl. (23) mit Benützung von (21) in die folgende über:

$$(38) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \sum_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa^{1-\varrho}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{p_\nu - n_\nu}{p_\nu^{1-\varrho}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{p_\nu - n_\nu}{n_\nu^{1-\varrho}} .\text{[1]}$$

Damit dieser Ausdruck einen vorgeschriebenen positiven Wert $s$ annimmt, ist notwendig und hinreichend, daß:

$$(39) \qquad p_\nu - n_\nu \cong s \cdot n_\nu^{1-\varrho},$$

und dieser Forderung wird offenbar genügt, wenn man setzt:

$$(40) \qquad n_\nu = \nu, \quad p_\nu = \nu + [s \cdot \nu^{1-\varrho}] \quad \left(\text{wegen: } \lim_{\nu\to\infty} \frac{[s \cdot \nu^{1-\varrho}]}{s \cdot \nu^{1-\varrho}} = 1\right).$$

Durch diese Wahl von $p_\nu$, $n_\nu$ wird dann allemal eine *konvergente* Anordnung der Glieder $\pm \frac{1}{\varkappa^{1-\varrho}}$ mit der Summe $s$ definiert.

---

1) *Diese* auf der *speziellen* Voraussetzung $p_\nu \cong n_\nu$ basierende Gleichung (aber *nicht* die *allgemeinere* Beziehung (23)) läßt sich wesentlich kürzer herleiten. Man hat nämlich:

$$\sum_{n_\nu+1}^{p_\nu} {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa^{1-\varrho}} \begin{cases} > \dfrac{p_\nu - n_\nu}{p_\nu^{1-\varrho}} \\[2ex] < \dfrac{p_\nu - n_\nu}{n_\nu^{1-\varrho}}, \end{cases}$$

woraus für $p_\nu \cong n_\nu$ unmittelbar Gl. (38) hervorgeht.

Ist $s$ *rational*, etwa $s = \frac{p}{q}$ (wo $p$, $q$ positiv und ganzzahlig), und $1 - \varrho = \frac{1}{r}$, wo $r$ eine positive ganze Zahl $\geqq 2$, so nimmt die Relation (39) die Form an:

$$p_\nu - n_\nu \simeq \frac{p}{q} \cdot n_\nu^{\frac{1}{r}}, \tag{41}$$

und sie wird offenbar auch befriedigt, wenn man setzt:

$$n_\nu = (q \cdot \nu)^r, \quad p_\nu = (q \cdot \nu)^r + p\nu. \tag{42}$$

Danach ergibt sich:

$$\lim_{\nu \to \infty} \left( \sum_1^{(q\nu)^r + p\nu} {}^{\varkappa} \frac{1}{\sqrt[r]{\varkappa}} - \sum_1^{(q\nu)^r} {}^{\varkappa} \frac{1}{\sqrt[r]{\varkappa}} \right) \tag{43}$$

$$= \sum_1^{\infty} {}^{\nu} \left( \sum_{(q(\nu-1))^r + p(\nu-1)+1}^{(q\nu)^r + p\nu} {}^{\varkappa} \frac{1}{\sqrt[r]{\varkappa}} - \sum_{(q(\nu-1))^r+1}^{(q\nu)^r} {}^{\varkappa} \frac{1}{\sqrt[r]{\varkappa}} \right) = \frac{p}{q}.$$

Diese Anordnung in Gruppen $A_\nu$, welche offenbar aus je $q^r(\nu^r - (\nu-1)^r) + p$ *positiven* und aus je $q^r(\nu^r - (\nu-1)^r)$ *negativen* Summanden bestehen, ist aber noch *keine konvergente* in den einzelnen Summanden $\pm \frac{1}{\sqrt[r]{\varkappa}}$. Denn man hat nach Gl. (38):

$$\sum_{(q(\nu-1))^r+1}^{(q\nu)^r} {}^{\varkappa} \frac{1}{\sqrt[r]{\varkappa}} \simeq \frac{(q\nu)^r - (q(\nu-1))^r}{q\nu} = q^{r-1} \cdot \nu^{r-1} \cdot \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^r \right\}, \tag{44}$$

also:

$$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{(q(\nu-1))^r+1}^{(q\nu)^r} {}^{\varkappa} \frac{1}{\sqrt[r]{\varkappa}} \begin{cases} = \infty, & \text{falls: } r > 2, \\ = 2q, & \text{falls: } r = 2, \end{cases} \tag{45}$$

sodaß also die betreffende Reihe in den Grenzen $\left(\frac{p}{q} \text{ und } \infty\right)$ bzw. $\left(\frac{p}{q} \text{ und } \frac{p}{q} + 2q\right)$ *oszilliert.* Man kann dieselbe indessen zu einer *konvergenten* machen, wenn man innerhalb jeder Gruppe $A_\nu$ zunächst auf *je ein positives* Glied *je ein negatives* und sodann den noch vorhandenen Überschuß von $p$ *positiven* Gliedern folgen läßt. Denn die Summe der letzteren hat offenbar für $\nu \to \infty$ den Grenzwert *Null*, und das gleiche gilt daher (wegen $\lim\limits_{\nu \to \infty} A_\nu = 0$) von der Summe der durchweg *negativ* ausfallenden $q^r \cdot (\nu^r - (\nu-1)^r)$ *Gliederpaare*, welche mit jenen $p$ Gliedern zusammen die Gruppe $A_\nu$ bilden.

8. In dem bisher betrachteten Falle einer aus den Gliedern der beiden Reihen $\sum_1^{\infty} {}^{\varkappa} a_\varkappa$, $\sum_1^{\infty} {}^{\varkappa} (-a_\varkappa)$ zusammengesetzten bedingt konvergenten Reihe

ließ sich geradezu die *Summation* dieser letzteren auf die Bestimmung des Grenzwertes eines *Partialrestes* von der Form $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sum\limits_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}_\varkappa a_\varkappa$ zurückführen, weil sich hier *jede noch so große endliche* Anzahl von Gliedern $a_\varkappa$ gegen die entsprechenden Glieder $-a_\varkappa$ forthebt. Dies findet offenbar *nicht* mehr statt, wenn an die Stelle der Reihe $\sum\limits_1^\infty{}_\varkappa(-a_\varkappa)$ eine solche mit anderen Gliedern: $\sum\limits_1^\infty{}_\varkappa(-b_\varkappa)$ tritt; und es liegt auf der Hand, daß, bei jeder Vereinigung der Glieder $a_\varkappa$, $(-b_\varkappa)$ zu einer konvergenten Reihe, die *Summe* dieser letzteren ganz wesentlich von dem Werte *jedes einzelnen* Summanden $a_1, a_2, a_3, \cdots, -b_1, -b_2, -b_3, \cdots$ abhängen wird. Dagegen läßt sich zeigen, daß die *Wertveränderung* $s$, welche diese Summe bei Umordnung der Glieder möglicherweise erleidet, allemal wieder durch den Grenzwert eines gewissen *Partialrestes* darstellbar ist, und daß dieselbe somit auch wieder *nur* von dem Verhalten des Absolutwertes der Glieder bei *unendlich wachsendem* Index abhängt (vgl. Nr. 3).

Angenommen, es liefere eine bestimmte Anordnung, bei welcher auf $p_\nu$ *positive* Glieder $a_k$ jedesmal $n_\nu$ *negative* Glieder $(-b_k)$ treffen, eine gewisse Reihensumme $s$, sodaß also:

$$\text{(46)}\qquad \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_1^{p_\nu}{}_\varkappa a_\varkappa-\sum_1^{n_\nu}{}_\varkappa b_\varkappa\right)=s,$$

während eine andere Anordnung, bei welcher $p_\nu$ *positiven* Gliedern $n_\nu'$ *negative* entsprechen, die Summe $s'$ ergeben mag, also:

$$\text{(47)}\qquad \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_1^{p_\nu}{}_\varkappa a_\varkappa-\sum_1^{n_\nu'}{}_\varkappa b_\varkappa\right)=s',$$

so findet man:

$$\text{(48)}\quad \Delta=s'-s=\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_1^{n_\nu}{}_\varkappa b_\varkappa-\sum_1^{n_\nu'}{}_\varkappa b_\varkappa\right)\begin{cases}=\lim\limits_{\nu\to\infty}\sum\limits_{n_\nu'+1}^{n_\nu}{}_\varkappa b_\varkappa, & \text{wenn: } n_\nu'<n_\nu,\\[2ex] =-\lim\limits_{\nu\to\infty}\sum\limits_{n_\nu+1}^{n_\nu'}{}_\varkappa b_\varkappa, & \text{wenn: } n_\nu'>n_\nu.\end{cases}$$

Man kann also die *Wertveränderung*, welche die Reihensumme $s$ beim Übergange zu der Anordnung (47) erleidet, *berechnen*, wenn es gelingt, den *Grenzwert des Partialrestes* (48) *bei gegebenem* $n_\nu$, $n_\nu'$ *zu bestimmen;* umgekehrt kann man *eine Anordnung mit beliebig vorzuschreibender Sum-*

*menänderung* $\Delta$ herstellen, wenn es gelingt, *solche* $n_\nu$, $n_\nu'$ *ausfindig zu machen*, für welche *jener Partialrest den Grenzwert* $\Delta$ besitzt. Und man kann schließlich im letzteren Falle auch geradezu *eine Anordnung mit beliebig vorzuschreibender Summe* $s'$ angeben, wenn noch $s$, d. h. die *Summe* der Reihe *bei irgendeiner bestimmten Anordnung* bekannt ist.

Betrachtet man z. B. eine Reihe von der Form $\sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1}\cdot a_\nu$, wo die $a_\nu$ monoton gegen Null abnehmen und $\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu$ divergiert, so ist dieselbe in dieser Anordnung stets *bedingt konvergent*: ihre Summe sei $s$. Ordnet man jetzt $p_\nu$ *positiven* Termen $n_\nu$ *negative* zu und bezeichnet die zugehörige Summe mit $s'$, also:

$$(49)\qquad s' = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_1^{p_\nu}{}^\varkappa a_{2\varkappa-1} - \sum_1^{n_\nu}{}^\varkappa a_{2\varkappa}\right),$$

so kann man zunächst $s$ in jede der beiden Formen setzen:

$$(50)\qquad s = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_1^{p_\nu}{}^\varkappa a_{2\varkappa-1} - \sum_1^{p_\nu}{}^\varkappa a_{2\varkappa}\right) = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_1^{n_\nu}{}^\varkappa a_{2\varkappa-1} - \sum_1^{n_\nu}{}^\varkappa a_{2\varkappa}\right)$$

und findet daher, wenn etwa $p_\nu > n_\nu$:

$$(51\text{a})\qquad s'-s\left\{\begin{aligned} &= \lim_{\nu\to\infty}\sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}^\varkappa a_{2\varkappa} \\ &= \lim_{\nu\to\infty}\sum_{n_\nu+1}^{p_\nu}{}^\varkappa a_{2\varkappa-1}\end{aligned}\right\} = \frac{1}{2}\lim_{\nu\to\infty}\sum_{2n_\nu}^{2p_\nu}{}^\varkappa a_\varkappa, \text{[1]}$$

ebenso, falls $p_\nu < n_\nu$:

$$(51\text{b})\qquad s'-s = -\frac{1}{2}\lim_{\nu\to\infty}\sum_{2p_\nu}^{2n_\nu}{}^\varkappa a_\varkappa.$$

Wird also $s$ als *bekannt* vorausgesetzt, so hätte man, um eine Anordnung von der Form (49) mit beliebig *vorgeschriebener* Summe $s'=\sigma$ zu erzielen, lediglich $p_\nu$, $n_\nu$ so zu bestimmen, daß:

$$(52)\qquad s+\frac{1}{2}\lim_{\nu\to\infty}\sum_{2n_\nu}^{2p_\nu}{}^\varkappa a_\varkappa = \sigma \quad\text{bzw.}\quad s-\frac{1}{2}\lim_{\nu\to\infty}\sum_{2p_\nu}^{2n_\nu}{}^\varkappa a_\varkappa = \sigma.$$

---

1) Dabei ist in der letzten Summe der Bequemlichkeit halber $2n_\nu$ statt $2n_\nu+1$ als unterer Index geschrieben, was offenbar ohne weiteres gestattet ist, da die hierin liegende Hinzufügung des Summanden $a_{2n_\nu}$ wegen $\lim_{\nu\to\infty} a_{2n_\nu}=0$ für den betreffenden Grenzwert belanglos ist.

Nimmt man z. B. speziell $a_\nu = \frac{1}{\nu}$, also (§ 59, S. 415, Gl. (9)):

$$(53) \qquad s = \sum_1^\infty {}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu} = \lg 2,$$

so wird (s. Gl. (19)):

$$(54) \qquad \left\{ \begin{matrix} s + \frac{1}{2} \lim\limits_{\nu \to \infty} \sum\limits_{2n_\nu}^{2p_\nu} {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \\ s - \frac{1}{2} \lim\limits_{\nu \to \infty} \sum\limits_{2p_\nu}^{2n_\nu} {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \end{matrix} \right\} = \lg 2 + \frac{1}{2} \lg \left( \lim_{\nu \to \infty} \frac{p_\nu}{n_\nu} \right) = \frac{1}{2} \lg \left( \lim_{\nu \to \infty} \frac{4p_\nu}{n_\nu} \right).$$

Hieraus ergibt sich, daß die harmonische Reihe mit alternierenden Vorzeichen die *Wertveränderung* $\frac{1}{2} \lg \left( \lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{p_\nu}{n_\nu} \right)$ erleidet, wenn man $p_\nu$ *positiven* Gliedern $n_\nu$ *negative* zuordnet, also insbesondere die Wertveränderung $\frac{1}{2} \lg \frac{p}{n}$, wenn man setzt: $p_\nu = p \cdot \nu$, $n_\nu = n \cdot \nu$, d. h. wenn man auf je $p$ *positive* Glieder je $n$ *negative* folgen läßt. (Man bemerke die Spezialfälle $p = 4$, $n = 1$ und $p = 1$, $n = 4$, welche die *Wertveränderung* $\pm \lg 2$, also die *Summen* $2 \lg 2$ und $0$ liefern.)

Um eine Reihe mit *vorgeschriebener Summe* $\sigma$ zu erzeugen, hat man lediglich $p_\nu$, $n_\nu$ so zu bestimmen, daß (Gl. (54)):

$$(55) \qquad \frac{1}{2} \lg \left( \lim_{\nu \to \infty} \frac{4p_\nu}{n_\nu} \right) = \sigma, \quad \text{also:} \quad \lim_{\nu \to \infty} \frac{4p_\nu}{n_\nu} = e^{2\sigma},$$

und man genügt offenbar dieser Forderung, wenn man setzt:

$$(56) \qquad \left\{ \begin{array}{llr} \phantom{\text{bzw. }} p_\nu = \left[ \frac{e^{2\sigma}}{4} \cdot \nu \right], & n_\nu = \nu, & \text{falls: } \sigma > \lg 2, \\ \text{bzw. } p_\nu = \nu, & n_\nu = [4e^{-2\sigma} \cdot \nu], & \text{falls: } \sigma < \lg 2. \end{array} \right.$$

Die Reihe würde dagegen nach $+\infty$ divergieren, wenn man $p_\nu > n_\nu$ annimmt, z. B. indem man setzt: $p_\nu = \nu^2$, $n_\nu = \nu$. Da in diesem Falle $p_\nu - p_{\nu-1} = 2\nu - 1$ wird, so besteht die entsprechende Gliederanordnung darin, daß man der Reihe nach auf $1, 3, 5, \cdots, (2\nu - 1), \cdots$ *positive* Glieder immer je *ein negatives* folgen läßt.

## § 61. Über numerische Berechnung und Transformation unendlicher Reihen: Die Methoden von Euler und Kummer.

1. Sind die Glieder einer konvergenten Reihe *numerisch* gegeben, so kann man durch *numerische Addition* einer hinlänglich großen Anzahl von Gliedern die Summe der Reihe *näherungsweise* berechnen, und man kann auch *den Grad der erzielten Annäherung beurteilen* und eventuell

auch noch *erhöhen*, sobald es außerdem gelingt, den Wert des vernachlässigten *Reihenrestes* in bestimmte Grenzen einzuschließen. Diese *theoretische* Möglichkeit erweist sich aber in der *Praxis* als völlig *illusorisch*, wenn die zu summierende Reihe verhältnismäßig *langsam* konvergiert, da in diesem Falle jede auch nur nennenswerte Annäherung eine unerträglich langwierige Rechnung ergeben würde.

Betrachten wir z. B. die Reihe:

$$s = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu^2} = s_n + r_n, \tag{1}$$

wo:

$$s_n = \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{1}{\nu^2}, \quad r_n = \sum_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu^2}, \tag{2}$$

so hat man:

$$r_n < \sum_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\nu-1)\cdot\nu} = \sum_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} \left(\frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{n}, \tag{3}$$

und daher:

$$s_n < s < s_n + \frac{1}{n}. \tag{4}$$

Nimmt man also beispielsweise $n = 1000$, so würde man hieraus zunächst nur soviel erkennen, daß die Summation der für die *Praxis* geradezu *enormen* Anzahl von 1000 Gliedern[1]) eine Summe $s_{1000}$ liefert, die um weniger als $\frac{1}{1000}$ unter $s$ liegt, die also immerhin schon in der *dritten* Dezimalstelle um *eine Einheit zu klein* sein kann.

Dieses Resultat läßt sich nun freilich noch einigermaßen *verbessern*, wenn man neben der zuvor gefundenen *oberen* Schranke für den Wert des Restes $r_n$ auch eine entsprechende *untere* Schranke bestimmt. Man findet nämlich nach Analogie von Ungl. (3):

$$r_n > \sum_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \sum_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) = \frac{1}{n+1}, \tag{5}$$

und daher neben Ungl. (4) die folgende:

$$s > s_n + \frac{1}{n+1} = s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}, \tag{6}$$

sodaß sich aus der Verbindung von Ungl. (4) und (6) ergibt:

$$s = s_n + \frac{1}{n} - \frac{\vartheta}{n(n+1)}, \tag{7}$$

---

1) Man versuche nur einmal, etwa 20 Glieder der obigen Reihe zu summieren!

wo $\vartheta$ zwischen 0 und 1 liegt. In Worten: Ersetzt man $s$ durch $s_n + \frac{1}{n}$, so erhält man zwar einen zu *großen* Wert, der begangene *Fehler* ist aber kleiner als $\frac{1}{n(n+1)}$. Im Falle $n = 1000$ wird dieser Fehler kleiner als $\frac{1}{1001000}$, er kann also, da dieser Bruch sehr nahe an $\frac{1}{\text{Million}}$ liegt, immerhin noch auf die 6te Dezimalstelle Einfluß üben. Man erkennt hieraus, daß auch bei diesem *verbesserten* Verfahren die erzielte Genauigkeit in keinem rechten Verhältnisse zu dem erforderlichen Rechnungsaufwande steht, und daß der letztere geradezu ins Ungeheuerliche wächst, wenn man eine merklich *größere* Genauigkeit erzielen will.

Hiernach erscheint es begreiflich, daß die Reihentheoretiker sich von jeher vielfach mit der Auffindung von Methoden beschäftigt haben, welche es ermöglichen, *langsam* konvergierende Reihen in *schneller* konvergierende zu *transformieren*: die beiden einfachsten dieser Methoden, die von Euler und Kummer herrühren, sollen jetzt erörtert werden.

2. Wir führen zunächst die folgenden Bezeichnungen ein[1]):

$$(8)\quad \begin{cases} a_\nu - a_{\nu+1} = \Delta^1 a_\nu = \Delta a_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots) \\ \Delta a_\nu - \Delta a_{\nu+1} = \Delta^2 a_\nu \\ \Delta^2 a_\nu - \Delta^2 a_{\nu+1} = \Delta^3 a_\nu \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Delta^n a_\nu - \Delta^n a_{\nu+1} = \Delta^{n+1} a_\nu \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Konvergiert nun die Reihe $\sum_0^\infty (-1)^\nu \cdot a_\nu$, wo $a_\nu \gtreqless 0$, gegen die Summe $s$, so hat man:

$$(9)\quad s \begin{cases} = \sum_0^\infty (-1)^\nu \cdot a_\nu \\ = a_0 + \sum_0^\infty (-1)^{\nu+1} \cdot a_{\nu+1} \end{cases}$$

und findet somit durch Addition dieser beiden Gleichungen:

$$2s = a_0 + \sum_0^\infty (-1)^\nu \cdot (a_\nu - a_{\nu+1}),$$

1) Man bemerke, daß hier das Zeichen $\Delta$ *keine Zahl*, also in der Verbindung $\Delta a_\nu$ *keinen Faktor*, sondern eine (mit dem $a_\nu$ vorzunehmende) *Operation* vorstellt. Dem entsprechend bedeutet $\Delta^n$ *keine Potenz*, sondern die *n-malige Wiederholung der Operation* $\Delta$ (also $n$ *keinen Exponenten*, sondern einen *Index*).

oder mit Benützung der Bezeichnung (8):

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot a_{\nu}=s=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot\Delta a_{\nu}.\text{[1]} \tag{10}$$

Da die hier auftretende Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot\Delta a_{\nu}$ sich von $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot a_{\nu}$ nur dadurch unterscheidet, daß $\Delta a_{\nu}$ an der Stelle von $a_{\nu}$ steht, so findet man durch Anwendung der nämlichen Transformation zunächst:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot\Delta a_{\nu}=\frac{1}{2}\Delta a_0+\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot\Delta^2 a_{\nu}$$

und durch Einführung dieser Beziehung in Gl. (10):

$$s=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2^2}\Delta a_0+\frac{1}{2^2}\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot\Delta^2 a_{\nu}. \tag{11}$$

Wendet man dieses Verfahren auf Gl. (10) im ganzen $n$ mal an, so gelangt man offenbar zu der Formel:

$$s=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2^2}\Delta a_0+\frac{1}{2^3}\Delta^2 a_0+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\Delta^n a_0+\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot\Delta^{n+1}a_{\nu}, \tag{12}$$

wie man durch den Schluß von $n$ auf $(n+1)$ noch genauer feststellen kann. Durch Anwendung der Transformation (10) auf das letzte Glied von Gl. (12) ergibt sich nämlich unmittelbar:

$$s=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2^2}\Delta a_0+\frac{1}{2^3}\Delta^2 a_0+\cdots+\frac{1}{2^{n+2}}\Delta^{n+1}a_0+\frac{1}{2^{n+2}}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot\Delta^{n+2}a_{\nu}, \tag{13}$$

d. h. wenn die Formel (12) für ein bestimmtes $n$ gilt, so bleibt sie auch gültig, wenn man $n$ durch $(n+1)$ ersetzt. Da aber die Richtigkeit der

---

1) Hieraus folgt, wenn die $a_{\nu}$ und $\Delta a_{\nu}$ *positiv* sind und *monoton abnehmen*, daß allemal:

$$s\begin{cases} >\frac{1}{2}a_0 \\ <\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}\Delta a_0=a_0-\frac{1}{2}a_1. \end{cases}$$

Und wenn man $a_{\nu}$ durch $a_{2n+\nu}$ ersetzt:

$$\sum_{2n}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot a_{\nu}\begin{cases} >\frac{1}{2}a_{2n} \\ <a_{2n}-\frac{1}{2}a_{2n+1}. \end{cases}$$

Formel (12) für $n = 1$ erwiesen ist (s. Gl. (11)), so gilt sie hiernach für jedes $n$. Hierzu sei noch bemerkt, daß aus der Voraussetzung $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ offenbar stets folgt: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Delta a_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} (a_{\nu+1} - a_\nu) = 0$, und somit, durch fortgesetzte Anwendung dieser Schlußweise, für jedes $n$:

$$\lim_{\nu\to\infty} \Delta^n a_\nu = 0. \tag{14}$$

3. Die Transformationsformel (12) erforderte zu ihrer Herleitung keine andere Voraussetzung, als daß $\sum\limits_0^\infty (-1)^\nu \cdot a_\nu$ *konvergieren* mußte. Wir unterwerfen jetzt die $a_\nu$ der Beschränkung, *positiv* zu sein und *monoton* gegen den Grenzwert *Null* abzunehmen, also:

$$a_\nu > a_{\nu+1}, \quad \lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0. \tag{15}$$

Daraus folgt dann zunächst, daß durchweg $\Delta a_\nu = a_\nu - a_{\nu+1} > 0$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Delta a_\nu = 0$ wird. Wir wollen aber weiter annehmen, daß auch die $\Delta a_\nu$ *monoton* (und dann selbstverständlich gegen Null) abnehmen, also:

$$\Delta a_\nu > \Delta a_{\nu+1}, \quad \lim_{\nu\to\infty} \Delta a_\nu = 0; \tag{16}$$

und wir wollen schließlich diese Annahme dahin ausdehnen, daß für *jeden* Wert von $n$:

$$\Delta^n a_\nu > \Delta^n a_{\nu+1} > 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots) \tag{17}$$

sein soll und daher:

$$0 < \Delta^n a_\nu = \Delta^{n-1} a_\nu - \Delta^{n-1} a_{\nu+1} < \Delta^{n-1} a_\nu < \cdots < \Delta a_\nu < a_\nu. \tag{18}$$

Infolge der über die $a_\nu$ bzw. $\Delta^n a_\nu$ getroffenen Festsetzungen liefert nun Gl. (12) die beiden Ungleichungen:

$$s \begin{cases} > \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2^2} \cdot \Delta a_0 + \frac{1}{2^3} \cdot \Delta^2 a_0 + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \Delta^n a_0 \\ < \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2^2} \cdot \Delta a_0 + \frac{1}{2^3} \cdot \Delta^2 a_0 + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \Delta^n a_0 + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \Delta^{n+1} a_0, \end{cases} \tag{19}$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{1}{2}\left(a_0 + \sum_1^n \frac{1}{2^\nu} \cdot \Delta^\nu a_0\right) \begin{cases} < s \\ > s - \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \Delta^{n+1} a_0. \end{cases} \tag{20}$$

Da $0 < \Delta^{n+1} a_0 < a_0$ (übrigens $\Delta^{n+1} a_\nu$ mit wachsenden Werten von $n$ nach Ungl. (18) *monoton abnimmt*), so lehren die Ungleichungen (20), daß deren linke Seite für $n \to \infty$ in eine *gegen die Summe s kon-*

*vergierende* Reihe übergeht, und man erhält auf diese Weise die angekündigte *Eulersche Transformationsformel:*

$$(21)\qquad s = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot a_{\nu} = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{2^{\nu}} \cdot \Delta^{\nu} a_0.$$

Setzt man sodann:

$$(22)\qquad s = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{1}{2^{\nu}} \cdot \Delta^{\nu} a_0 + r_n,$$

so ergeben sich zur Beurteilung des Restes $r_n$ aus Gl. (12) und (13) die Beziehungen:

$$(23)\qquad r_n \begin{cases} < \dfrac{1}{2^{n+1}} \cdot \Delta^{n+1} a_0 \\ > \dfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \Delta^{n+1} a_0 . \end{cases}$$

Dieser Rest ist also (selbstverständlich) *größer* als der *erste* der weggelassenen Glieder, aber immerhin *kleiner* als dessen *Zweifaches*.

4. **Beispiele.** 1) Die zu transformierende Reihe sei die folgende: $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \frac{1}{\nu+1}$, deren Summe, wie früher gezeigt wurde (§ 59, Gl. (9)), den lg 2 darstellt. Da hier: $a_{\nu} = \frac{1}{\nu+1}$, so wird:

$$\Delta a_{\nu} = \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2} = \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$\Delta^2 a_{\nu} = \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} - \frac{1}{(\nu+2)(\nu+3)} = \frac{1 \cdot 2}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^n a_{\nu} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n+1)}$$

(wie man leicht durch den Schluß von $n$ auf $(n+1)$ bestätigt). Infolgedessen hat man:

$$\Delta^n a_0 = \frac{1}{n+1}$$

und somit:

$$(24)\qquad \lg 2 = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{2^{\nu+1}(\nu+1)} = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu \cdot 2^{\nu}}.$$

Setzt man hier:

$$(25)\qquad \lg 2 = \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{1}{\nu \cdot 2^{\nu}} + r_n$$ (sodaß also $r_n$ dem $r_{n-1}$ in Ungl. (23) entspricht),

so wird:

$$(26)\qquad r_n \begin{cases} < \dfrac{1}{(n+1) \cdot 2^{n}} \\ > \dfrac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} . \end{cases}$$

Nimmt man z. B. $n = 20$ und beachtet, daß $2^4 = 16$, $2^8 = 16^2 = 256$, also: $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024 > 1000$ und daher schließlich: $2^{20} > 1000000$, so wird: $r_{20} < \frac{1}{21000000}$, sodaß hier schon durch Summation von 20 Gliedern eine verhältnismäßig große Annäherung erzielt wird (beiläufig bemerkt eine *größere*, als wenn man in der ursprünglichen Reihe 10 Millionen Glieder summieren würde[1]).

2) Es werde gesetzt: $a_\nu = \frac{1}{2\nu+1}$, sodaß die Reihe $\sum_0^\infty (-1)^\nu \cdot \frac{1}{2\nu+1}$ resultiert, welche gewöhnlich als die Leibnizsche bezeichnet wird.[2]) Man hat hier:

$$\Delta a_\nu = \frac{1}{2\nu+1} - \frac{1}{2\nu+3} = \frac{2}{(2\nu+1)(2\nu+3)}$$

$$\Delta^2 a_\nu = \frac{2}{(2\nu+1)(2\nu+3)} - \frac{2}{(2\nu+3)(2\nu+5)} = \frac{2\cdot 4}{(2\nu+1)(2\nu+3)(2\nu+5)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^n a_\nu = \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{(2\nu+1)(2\nu+3)\cdots(2\nu+2n+1)} = \frac{2^n\cdot n!}{(2\nu+1)(2\nu+3)\cdots(2\nu+2n+1)}$$

und daher:

$$\Delta^n a_0 = \frac{2^n\cdot n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}.$$

Hiernach ergibt sich:

$$(27)\quad \sum_0^\infty (-1)^\nu\cdot\frac{1}{2\nu+1} = \frac{1}{2}\left\{1 + \sum_1^\infty \frac{\nu!}{3\cdot 5\cdots(2\nu+1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1\cdot 2\cdots n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\right\} + r_n,$$

wo:

$$(28)\quad r_n \begin{cases} < \dfrac{1\cdot 2\cdots(n+1)}{3\cdot 5\cdots(2n+3)} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \\[2ex] > \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1\cdot 2\cdots(n+1)}{3\cdot 5\cdots(2n+3)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\cdot 3\cdots n+1}{3\cdot 5\cdots 2n+1}\cdot\dfrac{1}{2n+3} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{2n+3}. \end{cases}$$

5. Die Kummersche Transformationsmethode knüpft unmittelbar an den beim *Kummerschen Konvergenzkriterium* auftretenden Ausdruck an:

---

1) S. die Fußnote zu Gl. (10).

2) Ihre Summe ist, wie sich später ergeben wird, gleich $\frac{\pi}{4}$, wo $\pi$ die sogenannte Ludolfsche Zahl, d. h. die Maßzahl für den halben Umfang eines Kreises mit dem Radius 1.

(29) $$\lambda_\nu = B_\nu - B_{\nu+1} \cdot \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$$

(s. § 54, S. 379, Fußn. 1). Angenommen, man habe eine Folge *positiver* Zahlen $B_\nu$ *so* bestimmt, daß $\lim_{\nu\to\infty} \lambda_\nu$ einen *bestimmten positiven* Wert besitzt. Man kann dann ohne merkliche Beschränkung der Allgemeinheit speziell:

(30) $$\lim_{\nu\to\infty} \lambda_\nu = 1$$

setzen. Denn, wäre für irgendeine Wahl von $B_\nu$ zunächst: $\lim_{\nu\to\infty} \lambda_\nu = \lambda$, wo $\lambda$ *positiv* und *von* 1 *verschieden,* so braucht man das ursprünglich gewählte $B_\nu$ nur durch $B_\nu' = \frac{B_\nu}{\lambda}$ zu ersetzen, damit der fragliche Grenzwert $= 1$ ausfällt.

Sind nun die $a_\nu$ (zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab) durchweg *gleichbezeichnet,* so folgt aus der Bedingung (30) auf Grund des Kummerschen Kriteriums allemal die *Konvergenz* der Reihe $\sum a_\nu$ und zugleich die *Existenz* einer Beziehung von der Form:

(31) $$\lim_{\nu\to\infty} B_\nu \cdot a_\nu = \alpha,$$

wo $\alpha$ *eine bestimmte Zahl mit Einschluß der Null* bedeutet (s. § 54, S. 379, Gl. (7) und Fußn. 1).

Sind dagegen die $a_\nu$ mit *beliebig wechselnden Vorzeichen* behaftet, so wollen wir die (wenn auch nur *bedingte*) *Konvergenz* der Reihe $\sum a_\nu$, sowie die *Existenz der Beziehung* (31) ausdrücklich *voraussetzen.*

Aus Gl. (29) folgt sodann:

(32) $$\lambda_\nu a_\nu = B_\nu a_\nu - B_{\nu+1} a_{\nu+1}$$

und daher, wenn $n$ irgendeine bestimmte Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots$ bezeichnet:

$$\sum_n^\infty{}^\nu \lambda_\nu a_\nu = \sum_n^\infty{}^\nu (B_\nu a_\nu - B_{\nu+1} a_{\nu+1}),$$

also mit Berücksichtigung von Gl. (31):

(33) $$\sum_n^\infty{}^\nu \lambda_\nu a_\nu = B_n a_n - \alpha.$$

Diese Gleichung liefert offenbar ein Mittel zur *annähernden* Abschätzung des *Restes* $\sum_n^\infty{}^\nu a_\nu$. Denn da die $\lambda_\nu$ für hinlänglich große Werte von $\nu$ sich

*beliebig wenig* von 1 unterscheiden, so ist zu vermuten, daß für *sehr große* Werte von $n$ die Summe $\sum_n^\infty{}^{\nu}\lambda_\nu a_\nu$ sich *entsprechend wenig* von $\sum_n^\infty{}^{\nu} a_\nu$ unterscheiden wird.

In dieser etwas vagen Form ist freilich mit der eben gemachten Bemerkung nicht viel anzufangen. Dieselbe führt aber zu präziseren und praktisch brauchbaren Resultaten, wenn wir die $a_\nu$ und $\lambda_\nu$ *spezielleren Bedingungen* unterwerfen. Es seien etwa für $\nu \geqq n$ die $a_\nu$ durchweg *positiv* und die $\lambda_\nu$ *monoton zunehmend*, also: $\lambda_\nu < \lambda_{\nu+1} < 1$. Alsdann hat man offenbar:

$$(34)\qquad \sum_n^\infty{}^{\nu} a_\nu \begin{cases} < \sum_n^\infty{}^{\nu} \frac{\lambda_\nu}{\lambda_n} a_\nu \quad \left(\text{da: } 1 < \frac{\lambda_\nu}{\lambda_n} \text{ für } \nu > n\right), \\ > \sum_n^\infty{}^{\nu} \lambda_\nu \cdot a_\nu, \end{cases}$$

sodaß die Gleichung (33) die Beziehungen liefert:

$$(35)\qquad \sum_n^\infty{}^{\nu} a_\nu \begin{cases} < \frac{1}{\lambda_n}\left(B_n a_n - \alpha\right) \\ > B_n a_n - \alpha. \end{cases}$$

In gleicher Weise ergibt sich, wenn die $\lambda_\nu$ für $\nu \geqq n$ *monoton abnehmen*:

$$(36)\qquad \sum_n^\infty{}^{\nu} a_\nu \begin{cases} > \frac{1}{\lambda_n}\left(B_n a_n - \alpha\right) \\ < B_n a_n - \alpha. \end{cases}$$

Da $\lambda_n$ für einen einigermaßen großen Wert von $n$ verhältnismäßig nahe an 1 liegt, so erscheint der Rest $\sum_n^\infty{}^{\nu} a_\nu$ durch Ungl. (35) bzw. (36) in *entsprechend enge Grenzen* eingeschlossen.

Beispiele. 1) Sei $a_\nu = \frac{1}{\nu!}$, also $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{1}{\nu+1}$. Man kann in diesem Falle (nämlich *allemal*, wenn $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 0$) die Bedingung $\lim\limits_{\nu\to\infty} \lambda_\nu = 1$ am einfachsten in der Weise befriedigen, daß man $\lim\limits_{\nu\to\infty} B_\nu = 1$ oder geradezu $B_\nu = 1$ annimmt. Bei dieser letzteren Wahl wird hier:

$$\lambda_\nu = 1 - \frac{1}{\nu+1} = \frac{\nu}{\nu+1} \quad (\text{also mit } \nu \textit{ monoton zunehmend}),$$

sodaß die Ungleichungen (35), wenn man noch berücksichtigt, daß

$\alpha = \lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu B_\nu = 0$ wird, die folgenden Beziehungen liefern:

$$(37)\qquad \sum_n^\infty \frac{1}{\nu!} \begin{cases} < \dfrac{n+1}{n} \cdot \dfrac{1}{n!} \\ > \dfrac{1}{n!}, \end{cases}$$

deren *zweite* offenbar etwas selbstverständliches aussagt, während die *erste* auch auf die Form gebracht werden kann:

$$(38)\qquad \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{\nu!} < \frac{1}{n!\,n}.$$

2) Ist $a_\nu = \frac{1}{\nu \cdot (\lg \nu)^2}$, so liefert die Annahme: $B_\nu = \nu \cdot \lg \nu$ den Ausdruck:

$$(39)\quad \lambda_\nu = \frac{\nu \cdot \lg \nu}{\lg(\nu+1)} (\lg(\nu+1) - \lg \nu) \begin{cases} < \dfrac{\lg \nu}{\lg(\nu+1)} \\ > \dfrac{\nu \cdot \lg \nu}{(\nu+1)\lg(\nu+1)} \end{cases} \quad (\text{§ 34, S. 207, Ungl. (3a)}),$$

und es wird also wiederum $\lim \lambda_\nu = 1$. Da die $\lambda_\nu$ *monoton zunehmen* und $\alpha = 0$ zu setzen ist, so folgt (mit Benützung der *zweiten* Ungleichung in (39)) aus Ungl. (35):

$$(40)\qquad \sum_n^\infty \frac{1}{\nu \cdot (\lg \nu)^2} \begin{cases} < \dfrac{(n+1) \cdot \lg(n+1)}{n \cdot (\lg n)^2} \\ > \dfrac{1}{\lg n}. \end{cases}$$

Die zweite dieser Ungleichungen läßt in sehr anschaulicher Weise erkennen, *wie außerordentlich langsam* die Reihe $\sum \frac{1}{\nu \cdot (\lg \nu)^2}$ konvergiert. Da nämlich (§ 34, S. 206, Gl. (1)):

$$\lg n = \lg 10 \cdot \log n < 3 \cdot \log n$$

(wo $\log n$ den Briggschen Logarithmus von $n$ bezeichnet), so folgt aus Ungl. (40):

$$(41)\qquad \sum_n^\infty \frac{1}{\nu \cdot (\lg \nu)^2} > \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log n}.$$

Nimmt man also für $n$ eine Zahl an, die aus einer 1 und *Million Nullen* besteht, so wird $\log n = 1000000$ und somit der fragliche Rest immer noch größer als $\frac{1}{3 \text{ Millionen}}$, sodaß die Summation der vorangehenden *enormen* Anzahl von Gliedern den wahren Wert der Reihensumme noch nicht einmal auf 7 Dezimalstellen genau angibt.

6. Die Gleichung (33) kann auch unmittelbar dazu dienen, um die *Summation* der Reihe $\sum_n^\infty a_\nu$ auf diejenige einer *merklich schneller konvergierenden* zurückzuführen. Bringt man nämlich Gl. (33) auf die Form:

$$0 = (B_n a_n - \alpha) - \sum_n^\infty \lambda_\nu a_\nu,$$

so ergibt sich zur Addition der Identität:

$$\sum_n^\infty a_\nu = \sum_n^\infty a_\nu$$

die *Transformationsformel*:

$$\sum_n^\infty a_\nu = (B_n a_n - \alpha) + \sum_n^\infty (1 - \lambda_\nu) \cdot a_\nu. \tag{42}$$

Dabei *konvergiert* in der Tat die *rechts* stehende Reihe *stärker* als die ursprüngliche, da $\lim\limits_{\nu\to\infty}(1 - \lambda_\nu) = 0$.

Diese Transformationsmethode besitzt offenbar eine *erheblich größere Allgemeinheit*, als die zuvor betrachtete Eulersche. Auch gestattet sie, durch *beliebig oft wiederholte* Anwendung die *Konvergenz* der zu summierenden Reihe *immer weiter zu verstärken*. Die einzige *Schwierigkeit* besteht dabei jedesmal *in der passenden Auswahl der* $B_\nu$, und hiermit sind zugleich die *Grenzen* für die *praktische Brauchbarkeit* dieser Methode angedeutet.

Beispiele. 1) Es sei: $a_\nu = \frac{1}{\nu^2}$. Setzt man sodann: $B_\nu = \nu$, so wird:

$$\lambda_\nu = \nu - (\nu + 1) \cdot \frac{\nu^2}{(\nu+1)^2} = \frac{\nu}{\nu+1}, \quad \text{also: } \lim_{\nu\to\infty} \lambda_\nu = 1,$$

und, da wiederum: $\alpha = \lim\limits_{\nu\to\infty} B_\nu a_\nu = 0$, nach Gl. (42):

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2} = 1 + \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2 \cdot (\nu+1)}.^{1)} \tag{43}$$

---

1) Wie bei späterer Gelegenheit gezeigt werden wird, ist:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wendet man die entsprechende Transformation auf die *rechts* stehende Reihe an, so ergibt sich (wenn man $B_\nu = \frac{1}{2}\nu$ setzt):

$$\sum_1^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + 2 \sum_1^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu^2 \cdot (\nu+1)(\nu+2)}$$

und, wenn man dieses Verfahren im ganzen $n$ mal in der Weise wiederholt, daß man noch der Reihe nach $B_\nu = \frac{1}{2}\nu$, $B_\nu = \frac{1}{3}\nu, \cdots, B_\nu = \frac{1}{n}\nu$ setzt:

$$(44) \qquad \sum_1^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + n! \sum_1^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu^2 \cdot (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}$$

oder, anders geschrieben:

$$(45) \qquad \sum_{n+1}^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu^2} = n! \sum_1^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu^2 \cdot (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}.$$

2) Setzt man: $a_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{2\nu-1}$, sodaß für $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ die schon in Nr. 4 betrachtete *Leibnizsche Reihe* resultiert, so wird: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = -1$. In diesem und in jedem analogen Falle (d. h. wenn die $a_\nu$ Zahlen mit *alternierenden* Vorzeichen bedeuten und $\lim\limits_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = 1$ ist) genügt man offenbar allemal der Bedingung: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \lambda_\nu = 1$, wenn man setzt:

$$(46) \qquad B_\nu = \frac{1}{2}, \quad \textit{oder etwas allgemeiner:}\ B_\nu = \frac{1}{2} B_\nu', \quad \text{wo: } \lim_{\nu\to\infty} B' = 1.$$

Wählt man etwa $B_\nu = \frac{1}{2}$, also: $B_1 a_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha = \lim\limits_{\nu\to\infty} B_\nu a_\nu = 0$, und:

$$\lambda_\nu = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2\nu-1}{2\nu+1}\right) = \frac{2\nu}{2\nu+1}, \quad 1 - \lambda_\nu = \frac{1}{2\nu+1},$$

so ergibt sich:

$$(47) \qquad \sum_1^\infty {}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{2\nu-1} = \frac{1}{2} + \sum_1^\infty {}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{4\nu^2-1}.$$

Durch nochmalige Anwendung dieser Transformation für:

$$B_\nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\nu+1}{2\nu-1}, \quad \text{also: } \lambda_\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{2\nu+1}{2\nu-1} + \frac{2\nu+3}{2\nu+1} \cdot \frac{(2\nu+1)\cdot(2\nu-1)}{(2\nu+3)\cdot(2\nu+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\nu+1}{2\nu-1} + \frac{2\nu-1}{2\nu+1}\right) = \frac{4\nu^2+1}{4\nu^2-1}$$

erhält man:

$$(48)\qquad \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{2\nu-1}=1-2\cdot\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{(4\nu^2-1)^2},$$

und, wenn man jetzt

$$B_\nu=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\nu+1}{2\nu-3}$$

setzt und nochmals transformiert:

$$(49)\qquad \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot\frac{1}{2\nu-1}=\frac{4}{3}+24\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(4\nu^2-1)^2(4\nu^2-9)}.$$

Diese letztere Reihe ist bereits so stark konvergent, daß die Summation von *nur vier* Gliedern den Wert der Reihensumme schon auf 4 Dezimalstellen richtig liefert (man findet auf diese Weise:

$$4s=\pi=3{,}1415\cdots).$$

## Kapitel IV.

# Unendliche Doppelreihen mit reellen Gliedern.

### § 62. Doppelreihen und iterierte Reihen. — Konvergenz und Divergenz einer Doppelreihe. — Beziehungen zwischen einer Doppelreihe und der aus den Zeilen- bzw. Kolonnenreihen gebildeten iterierten Reihe.

1. Wir haben ein zweifach-unendliches Schema von der Form:

$$(1)\qquad \begin{cases} \quad u_0^{(0)}+u_1^{(0)}+\cdots+u_\mu^{(0)}+\cdots \\ +\,u_0^{(1)}+u_1^{(1)}+\cdots+u_\mu^{(1)}+\cdots \\ +\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +\,u_0^{(\nu)}+u_1^{(\nu)}+\cdots+u_\mu^{(\nu)}+\cdots \\ +\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

bei früherer Gelegenheit (§ 46, Gl. (18), S. 315 und § 58, Gl. (17), S. 410) als eine *unendliche Reihe* aufgefaßt, deren einzelne Glieder wiederum *unendliche Reihen* sind (nämlich die *Zeilen* bzw. *Kolonnen* des Schemas). Die

*„Summation"* eines solchen Schemas in dem gedachten Sinne wurde alsdann dargestellt durch eine der Beziehungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} & \left(\text{als Abkürzung für: } \sum_0^\infty{}_\nu \left(\sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)}\right)\right) \\ \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} & \left(\text{als Abkürzung für: } \sum_0^\infty{}_\mu \left(\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)}\right)\right). \end{cases}$$

Zur deutlicheren Veranschaulichung der hierdurch angedeuteten Grenzübergänge wollen wir mit $S_\mu^{(\nu)}$ die Summe aller derjenigen Glieder bezeichnen, welche in dem von der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Zeile und $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Kolonne abgegrenzten Abschnitte des Schemas (1) enthalten sind, also:

$$(3)\qquad S_\mu^{(\nu)} = \begin{cases} \phantom{+}\, u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \cdots + u_\mu^{(0)} \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \cdots + u_\mu^{(1)} \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \cdots + u_\mu^{(\nu)}. \end{cases}$$

Alsdann hat man offenbar:

$$(4)\qquad \begin{cases} \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \left(\lim\limits_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) & (\text{Reihe der } \textit{Zeilen}\text{summen}) \\ \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = \lim\limits_{\mu\to\infty} \left(\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) & (\text{Reihe der } \textit{Kolonnen}\text{summen}). \end{cases}$$

2. Diese letzteren Beziehungen führen nun unmittelbar darauf hin, die *„Summation"* des Schemas (1) noch in anderer Weise aufzufassen, nämlich, indem man nach dem *Grenzwerte der zweifach-unendlichen Zahlenfolge* $S_\mu^{(\nu)}$, dem *„Doppellimes"* in dem früher definierten (§ 40, Nr. 1, S. 254) allgemeinen Sinne fragt. Bei dieser Auffassungsweise bezeichnen wir das Schema (1) als *unendliche Doppelreihe* und nennen dieselbe *konvergent*, wenn $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ als *bestimmte Zahl* existiert. Ist dann etwa:

$$(5)\qquad \lim_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)} = S,$$

so heißt $S$ die *Summe* der *unendlichen Doppelreihe* (1), was wir durch die Schreibweise ausdrücken wollen:

$$(6)\qquad \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S.\ ^{1)}$$

---

1) Wären die *Anfangswerte* der Indizes $\mu$, $\nu$ *verschiedene* Zahlen, etwa $\mu_0$ und $\nu_0$, so würden wir die Summe der betreffenden Doppelreihe durch das

In jedem anderen Falle heißt die *Doppelreihe divergent* und zwar *eigentlich divergent*, wenn:

$$\lim_{\mu,\nu \to \infty} S_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bzw.} \quad = -\infty; \tag{7}$$

*uneigentlich divergent (oszillierend, unbestimmt)*, wenn überhaupt *kein endlicher* oder *mit bestimmtem Vorzeichen unendlicher* $\lim\limits_{\mu,\nu \to \infty} S_\mu^{(\nu)}$ existiert.

Auch in diesen letzteren Fällen bedient man sich gelegentlich der zwar *nicht ganz korrekten*, aber *bequemen* und zu Mißverständnissen keinen Anlaß bietenden Ausdrucksweise: die *Summe* der Doppelreihe (in Zeichen: $\sum\limits_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$) sei *unendlich groß* bzw. *unbestimmt*.

Nach dem gesagten ist für den Begriff der *Doppelreihe* charakteristisch, daß die *beiden* Indizes $\mu$, $\nu$ *gleichzeitig* ins Unendliche wachsen. Dagegen wird man ein Symbol von der in Nr. 1 betrachteten Art:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)}, \tag{8}$$

welches also *zwei nacheinander auszuführende Grenzübergänge* in sich schließt, passend als eine *iterierte Reihe* bezeichnen. Die Beziehungen zwischen der *Doppelreihe* $\sum\limits_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ und den *iterierten Reihen* (8) sind identisch mit denjenigen zwischen:

$$\lim_{\mu,\nu \to \infty} S_\mu^{(\nu)} \quad \text{und:} \quad \lim_{\nu \to \infty}\left(\lim_{\mu \to \infty} S_\mu^{(\nu)}\right) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\mu \to \infty}\left(\lim_{\nu \to \infty} S_\mu^{(\nu)}\right) \tag{9}$$

und müssen sich aus den allgemeinen Grenzwertsätzen ergeben, welche in § 43 (S. 288 ff.) abgeleitet wurden.

Im Anschlusse an diese letzteren sei zunächst bemerkt, daß allemal,

---

Symbol:

$$\sum_{\mu_0,\nu_0}^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$$

bezeichnen.

* Wenn aus dem Zusammenhange unzweideutig hervorgeht, von welcher Doppelreihe die Rede ist, oder wenn es auf eine endliche Anzahl von Anfangsgliedern nicht speziell ankommt (also z. B., wenn es sich lediglich um die Frage der Konvergenz oder Divergenz handelt), so bedienen wir uns gewöhnlich der abgekürzten Bezeichnung $\sum\limits_{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$.

wenn die Doppelreihe $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ *konvergiert* oder *eigentlich divergiert*, wenn also ein *endlicher* oder *mit bestimmtem Vorzeichen unendlicher* $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ *existiert*, dieser nämliche Grenzwert zum Vorschein kommen muß, wenn man $\mu = \nu$ setzt (vgl. § 40, S. 259, Zusatz), sodaß also:

$$\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} S_\nu^{(\nu)} = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n{}^{\nu} \sum_0^n{}^{\mu}\, u_\mu^{(\nu)}. \tag{10}$$

Hieraus folgt aber, daß jede *konvergente* oder *eigentlich divergente Doppelreihe* auch als *konvergente* bzw. *eigentlich divergente einfache Reihe* angeschrieben werden kann. Denn man hat:

$$S_n^{(n)} = S_0^{(0)} + \sum_0^n{}^{\nu} \left(S_\nu^{(\nu)} - S_{\nu-1}^{(\nu-1)}\right) \tag{11}$$

und daher:

$$\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S_0^{(0)} + \sum_0^\infty{}^{\nu} \left(S_\nu^{(\nu)} - S_{\nu-1}^{(\nu-1)}\right). \tag{12}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} S_\nu^{(\nu)} - S_{\nu-1}^{(\nu-1)} &= u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \cdots + u_\nu^{(\nu)} + u_\nu^{(\nu-1)} + \cdots + u_\nu^{(0)} \\ &= \left(u_0^{(\nu)} + u_\nu^{(0)}\right) + \cdots + \left(u_{\nu-1}^{(\nu)} + u_\nu^{(\nu-1)}\right) + u_\nu^{(\nu)}, \end{aligned} \tag{13}$$

d. h. das $(\nu+1)^{\text{te}}$ Glied jener *einfachen* Reihe besteht aus der Summe aller Glieder, welche in der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Zeile und in der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Kolonne des Schemas (1) stehen, bis zu dem Gliede $u_\nu^{(\nu)}$ einschließlich.

3. Es erweist sich für das folgende als nützlich, in analoger Weise wie die Glieder einer *einfachen* Reihe als Differenzen zweier konsekutiver Gliedersummen, die $u_\mu^{(\nu)}$ durch die $S_\mu^{(\nu)}$ darzustellen.

Aus der Definitionsgleichung (2) folgt unmittelbar, daß:

$$\left\{\begin{aligned} & u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \cdots + u_\mu^{(0)} = S_\mu^{(0)} \\ & u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \cdots + u_\mu^{(\nu)} = S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} \quad (\nu \geqq 1), \end{aligned}\right. \tag{14}$$

und ebenso:

$$\left\{\begin{aligned} & u_0^{(0)} + u_0^{(1)} + \cdots + u_0^{(\nu)} = S_0^{(\nu)} \\ & u_\mu^{(0)} + u_\mu^{(1)} + \cdots + u_\mu^{(\nu)} = S_\mu^{(\nu)} - S_{\mu-1}^{(\nu)} \quad (\mu \geqq 1). \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Daraus ergibt sich weiter:

$$(16)\begin{cases}\text{(a)}\ u_0^{(0)}=S_0^{(0)},\ u_\mu^{(0)}=S_\mu^{(0)}-S_{\mu-1}^{(0)}\ (\mu\geqq 1),\ u_0^{(\nu)}=S_0^{(\nu)}-S_0^{(\nu-1)}\ (\nu\geqq 1),\\ \left.\begin{aligned} u_\mu^{(\nu)}&=S_\mu^{(\nu)}-S_\mu^{(\nu-1)}-\left(S_{\mu-1}^{(\nu)}-S_{\mu-1}^{(\nu-1)}\right)\\ \text{(b)}\qquad &=S_{\mu-1}^{(\nu-1)}+S_\mu^{(\nu)}-\left(S_\mu^{(\nu-1)}+S_{\mu-1}^{(\nu)}\right)\end{aligned}\right\}\ (\mu\geqq 1,\ \nu\geqq 1).\end{cases}$$

Die letzte Gleichung zeigt unmittelbar, daß:

$$(17)\qquad \lim_{\mu,\nu\to\infty} u_\mu^{(\nu)}=0$$

sein muß, wenn ein *endlicher* $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ existiert, d. h. wenn die *Doppelreihe konvergiert.* Insbesondere ist also bei einer *konvergenten Doppelreihe* stets:

$$(18)\qquad \lim_{\nu\to\infty} u_\nu^{(\nu)}=0,$$

d. h. die Glieder, welche die unbegrenzte Hauptdiagonale des Schemas (1) bilden, müssen schließlich gegen *Null* konvergieren.

Da andererseits die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ nach § 43, S. 290, Fußn. 1, *keineswegs* diejenige von:

$\lim\limits_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ *für irgendeinen endlichen Wert von* $\nu$

$\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ " " " " " $\mu$

in sich schließt, so lassen die Gleichungen (16) die Möglichkeit offen, daß selbst bei einer *konvergenten* Doppelreihe:

$\lim\limits_{\mu\to\infty} u_\mu^{(\nu)}$ *für keinen einzigen endlichen Wert von* $\nu$

$\lim\limits_{\nu\to\infty} u_\mu^{(\nu)}$ " " " " " " $\mu$

zu *verschwinden* braucht. Mit anderen Worten: *Eine Doppelreihe kann sehr wohl konvergieren, ohne daß die Glieder einer einzigen Zeile oder Kolonne mit unbegrenzt wachsender Stellenzahl der Null zustreben.*[1])

1) Es können sogar bei einer *konvergenten* Doppelreihe die Glieder einer *endlichen* Anzahl von Zeilen und Kolonnen numerisch *ins Unendliche* wachsen, mit anderen Worten, es brauchen die $\left|u_\mu^{(\nu)}\right|$ nicht einmal unter einer endlichen Schranke zu bleiben.

Man überzeugt sich hiervon ohne weiteres, wenn man in irgendeiner konvergenten Doppelreihe eine gerade Anzahl von Anfangszeilen (Anfangskolonnen) durch solche von der Form:

$$\begin{matrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_\mu & \cdots, \\ -b_0 & -b_1 & \cdots & -b_\mu & \cdots, \end{matrix}$$

wo: $\lim\limits_{\mu\to\infty} b_\mu=\infty$, ersetzt.

Beispiel. Man setze:

$$S_\mu^{(\nu)} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2(a+1)} \cdot \left(\frac{1}{a^\mu} + \frac{1}{a^\nu}\right) \quad \begin{pmatrix}\mu = 0, 1, 2, \cdots \\ \nu = 0, 1, 2, \cdots\end{pmatrix}, \tag{19}$$

wo $a > 1$ sein soll. Alsdann hat man nach Gl. (16):

$$\left\{\begin{aligned} & u_0^{(0)} = \frac{1}{a+1}, \quad u_\mu^{(0)} = \frac{(-1)^\mu}{2}\left(\frac{1}{a^\mu} + \frac{2}{a+1}\right), \quad u_0^{(\nu)} = \frac{(-1)^\nu}{2}\left(\frac{1}{a^\nu} + \frac{2}{a+1}\right) \\ & \qquad\qquad u_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu} \cdot \left(\frac{1}{a^\mu} + \frac{1}{a^\nu}\right) \\ & \qquad\qquad (\mu \geqq 1, \quad \nu \geqq 1). \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Die aus diesen Gliedern $u_\mu^{(\nu)}$ gebildete Doppelreihe ist alsdann *konvergent*, denn es ergibt sich offenbar:

$$\lim_{\mu, \nu \to \infty} S_\mu^{(\nu)} = 0. \tag{21}$$

Nichtsdestoweniger findet man:

$$\left\{\begin{aligned} & \lim_{\mu\to\infty} \left|u_\mu^{(0)}\right| = \frac{1}{a+1}, \quad \lim_{\mu\to\infty} \left|u_\mu^{(\nu)}\right| = \frac{1}{a^\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots), \\ & \lim_{\nu\to\infty} \left|u_0^{(\nu)}\right| = \frac{1}{a+1}, \quad \lim_{\nu\to\infty} \left|u_\mu^{(\nu)}\right| = \frac{1}{a^\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, \cdots), \end{aligned}\right. \tag{22}$$

sodaß also die Glieder *jeder* einzelnen Zeile und Kolonne numerisch über einer endlichen Zahl bleiben.

4. Wenn $\lim\limits_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für jedes eine gewisse Zahl $n$ nicht übersteigende $\nu$ eine *bestimmte Zahl* vorstellt, etwa:

$$\lim_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)} = S^{(\nu)} \quad \text{für: } \nu = 0, 1, 2, \cdots, n, \tag{23}$$

so ergibt sich aus Gl. (14), daß:

$$\left\{\begin{aligned} & \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(0)} = S^{(0)} \\ & \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S^{(\nu)} - S^{(\nu-1)} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n), \end{aligned}\right. \tag{24}$$

d. h. fallen die Grenzwerte $\lim\limits_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für $\nu = 0, 1, 2, \cdots, n$ *endlich* aus, so bildet die 1te, 2te, $\cdots$, $(n+1)$te *Zeile* des Schemas (1) je eine *konvergente* Reihe.

*Umgekehrt* hat man stets:

$$S_m^{(\nu)} = \sum_0^m{}_\mu\, u_\mu^{(0)} + \sum_0^m{}_\mu\, u_\mu^{(1)} + \cdots + \sum_0^m{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots) \tag{25}$$

und daher:

$$(26)\quad \lim_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(0)} + \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(1)} + \cdots + \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, n),$$

sobald die *rechts* auftretenden *Reihen*, d. h. die 1te, 2te, $\cdots$, $(n+1)$te *Zeile, konvergieren.*

Dieses Resultat läßt sich folgendermaßen aussprechen:

*Die Existenz endlicher Grenzwerte* $\lim\limits_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ *für* $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ *ist völlig gleichwertig mit der Konvergenz aller einzelnen Zeilen.*

Die *analoge* Beziehung besteht dann offenbar zwischen der Existenz *endlicher* Grenzwerte $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für $\mu = 0, 1, 2, \cdots$ und der *Konvergenz* aller einzelnen *Kolonnen.*

5. Mit Benützung dieses Ergebnisses liefern die in § 43 entwickelten Beziehungen zwischen Grenzwerten von der Form:

$$\lim_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{array}{ll} \lim\limits_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}, & \lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\lim\limits_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) \\ \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}, & \lim\limits_{\mu\to\infty}\left(\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}\right), \end{array}\right.$$

wenn man $a_\mu^{(\nu)}$ durch $S_\mu^{(\nu)}$ ersetzt, die folgenden Sätze:

(I) *Eine Doppelreihe kann konvergieren, ohne daß eine einzige Zeile oder Kolonne eine konvergente Reihe bildet. Dabei kann aber immer nur eine endliche Anzahl von Zeilen bzw. Kolonnen eigentlich divergieren oder ein unendliches Grenzintervall besitzen; und es muß das Grenzintervall aller Zeilen und Kolonnen von einer bestimmten an unter eine beliebig kleine positive Zahl herabsinken.*

Aus § 43, Satz (IIb), S. 290 folgt zunächst nur soviel, daß die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ keineswegs diejenige von $\lim\limits_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ bzw. $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für irgendeinen *endlichen* Wert von $\nu$ bzw. $\mu$ nach sich zieht (s. S. 290, Fußn. 1). Daß dann überdies auch *keine einzige Zeile* bzw. *Kolonne* zu konvergieren braucht, läßt sich durch Beispiele leicht belegen (s. weiter unten). Andererseits bestehen aber, wenn $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ existiert, die Beziehungen (S. 284, Gl. (1a)):

$$(27)\qquad \lim_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)} \left\{\begin{array}{l} = \lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\underline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}\, S_\mu^{(\nu)}\right) = \lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\overline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}\, S_\mu^{(\nu)}\right) \\ = \lim\limits_{\mu\to\infty}\left(\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, S_\mu^{(\nu)}\right) = \lim\limits_{\mu\to\infty}\left(\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, S_\mu^{(\nu)}\right), \end{array}\right.$$

woraus mit Benützung der Beziehungen (14) die Richtigkeit der übrigen Behauptungen hervorgeht.

Ein Beispiel einer Doppelreihe, bei welcher sicher *keine einzige Zeile und Kolonne konvergiert,* wurde bereits am Schlusse von Nr. 3 gegeben: bei der dort angeführten Reihe besitzen ja nicht einmal die Glieder der einzelnen Zeilen und Kolonnen den Grenzwert *Null.* Im übrigen war (Gl. (19)):

$$S_\mu^{(\nu)} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2(a+1)}\left(\frac{1}{a^\mu} + \frac{1}{a^\nu}\right),$$

und hieraus ergibt sich:

$$(28)\qquad \begin{cases} S_\mu^{(0)} = \dfrac{(-1)^\mu}{2(a+1)}\left(\dfrac{1}{a^\mu} + 1\right) \\ S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} = \dfrac{(-1)^{\mu+\nu}}{2(a+1)}\left(\dfrac{2}{a^\mu} + \dfrac{a+1}{a^\nu}\right) \quad (\nu \geqq 1), \end{cases}$$

sodaß also die 1te *Zeile* in den Grenzen $\pm\frac{1}{2(a+1)}$, die $(\nu+1)$te (wo $\nu \geqq 1$) in den Grenzen $\pm\frac{1}{2a^\nu}$ *oszilliert*: man erkennt ohne weiteres, daß dieses *Grenzintervall* für hinlänglich große Werte von $\nu$ in der Tat *beliebig klein* wird. — In analoger Weise verhalten sich die *Kolonnen* der fraglichen Reihe.

Will man ferner *konvergente* Doppelreihen herstellen, bei denen eine *endliche* Anzahl von *Zeilen (Kolonnen) eigentlich* divergiert oder ein *unendliches* Grenzintervall besitzt, so braucht man nur (analog wie in Fußnote 1, S. 453 angegeben) in *irgendeiner konvergenten* Doppelreihe eine beliebige Anzahl von *Zeilen (Kolonnen)* durch die Glieder irgendwelcher *eigentlich divergenter* oder ein *unendliches Grenzintervall* besitzender Reihen, *ebensoviele andere Zeilen (Kolonnen)* durch die *nämlichen* Glieder mit *entgegengesetztem* Vorzeichen zu ersetzen.

(II) *Ist außer der Doppelreihe:* $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S$ *jede einzelne Zeile* $\sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ *oder jede einzelne Kolonne* $\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots)$ *konvergent, so konvergiert auch die Reihe der Zeilensummen bzw. diejenige der Kolonnensummen gegen die Summe* $S$, *d. h. man hat:*

$$(29)\qquad \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \text{bzw.} \quad \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S.$$

Denn nach § 43, S. 285, Gl. (1b) hat die Annahme: $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)} = S$ und die vorausgesetzte Existenz endlicher Grenzwerte $\lim\limits_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ bzw. $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots)$ stets zur Folge, daß:

$$(30)\qquad \lim_{\nu\to\infty}\left(\lim_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = S, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\mu\to\infty}\left(\lim_{\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = S.$$

Man kann den Inhalt dieses Satzes auch folgendermaßen aussprechen:

(IIa) *Eine konvergente*[1]) *Doppelreihe mit konvergenten Zeilen bzw. Kolonnen läßt sich durch die iterierte Reihe der Zeilen- bzw. Kolonnenreihen ersetzen. Ihre Summation kann also auf zwei sukzessive auszuführende einfache Reihensummationen zurückgeführt werden, in Zeichen:*

$$(31)\qquad \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}^{\nu} \sum_0^\infty{}^{\mu}\, u_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}^{\mu} \sum_0^\infty{}^{\nu}\, u_\mu^{(\nu)}. \text{—}$$

Der Satz (II) bleibt *mutatis mutandis* offenbar richtig, wenn $+\infty$ oder $-\infty$ an die Stelle der endlichen Zahl $S$ tritt, da die entsprechend modifizierte Gleichung (30) auch in diesem Falle Gültigkeit behält (siehe wieder S. 285, Gl. (1b)). Man findet also:

(III) *Ist eine Doppelreihe mit konvergenten Zeilen bzw. Kolonnen eigentlich divergent, so gilt das gleiche von der Reihe der Zeilen- bzw. Kolonnensummen.*

Mit Berücksichtigung dieses Satzes und des weiteren Umstandes, daß nach § 43, Nr. 2 (S. 285) die *Existenz* der Beziehung:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(\lim_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu\to\infty}\left(\lim_{\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}\right)$$

noch keineswegs die von $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ nach sich zieht, die *Nichtexistenz* jener Beziehung bei gleichzeitiger Existenz der *inneren* Limites (insbesondere auch dann, wenn die beiden Seiten jener Beziehung zwar *bestimmte*, aber voneinander *verschiedene* Zahlen vorstellen) dagegen das Vorhandensein von $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ definitiv ausschließt, ergibt sich sodann:

(IV) *Auch wenn alle Zeilen und Kolonnen des Schemas* (1) *konvergente Reihen bilden und wenn die Reihe der Zeilensummen und diejenige der Kolonnensummen gegen die nämliche Summe* $S$

---

1) Die *Konvergenz* der *Doppelreihe* muß *a priori* feststehen und darf nicht etwa ohne weiteres aus der etwaigen *Konvergenz* der betreffenden *iterierten* Reihen geschlossen werden: vgl. Satz (IV).

*konvergiert, so kann die betreffende Doppelreihe nichtsdestoweniger divergieren: sie divergiert dann nach Satz* (III) *allemal uneigentlich. Diese Divergenz muß eintreten, wenn die Reihe der Zeilensummen und diejenige der Kolonnensummen gegen verschiedene Werte konvergieren oder wenn nur eine dieser beiden Reihen konvergiert.*

Um Beispiele derartiger *divergenter Doppelreihen* zu gewinnen, hat man lediglich für $S_\mu^{(\nu)}$ einen passend gewählten jener Ausdrücke $a_\mu^{(\nu)}$ zu setzen, wie sie in § 42, 43 näher untersucht wurden, und sodann die Reihenglieder $u_\mu^{(\nu)}$ mit Hilfe der Gleichungen (16) entsprechend darzustellen. Setzt man z. B.[1]):

$$(32) \qquad S_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2}, \quad \frac{\mu\nu}{1+\mu^2+\nu^2}, \quad (-1)^\mu \frac{\mu^3\nu^3}{1+\mu^6+\nu^6}$$
$$(\mu = 0, 1, 2, \cdots, \; \nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

so hat man:

$$(33) \quad \begin{cases} \lim\limits_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)} = 0 \quad \text{für jedes einzelne } \nu \text{ bzw. } \mu, \\ \text{also auch: } \lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\lim\limits_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = \lim\limits_{\mu\to\infty}\left(\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = 0, \end{cases}$$

während ein endlicher oder bestimmt-unendlicher $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ *nicht existiert.* Es konvergiert dann also jede *Zeile* und jede *Kolonne,* desgleichen die Reihe aller *Zeilensummen* und diejenige aller *Kolonnensummen* gegen die Summe 0, während die betreffende Doppelreihe *oszilliert.*

Nimmt man ferner für $S_\mu^{(\nu)}$ einen der folgenden Ausdrücke (§ 43, Nr. 2, S. 285):

$$(34) \qquad S_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu+1}{\mu+\nu+1}, \quad 2^{-\frac{\nu+1}{\mu+1}},$$

so wird:

$$(35) \qquad \lim_{\nu\to\infty}\left(\lim_{\mu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = 1, \quad \lim_{\mu\to\infty}\left(\lim_{\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = 0,$$

sodaß also die Reihe der *Zeilensummen* gegen die Summe 1, diejenige der *Kolonnensummen* gegen die Summe 0 konvergiert (während die betreffende Doppelreihe dann *eo ipso* oszilliert). Eine verhältnismäßig ein-

1) Das erste dieser Beispiele geht aus § 43, Beispiel 3), S. 276 hervor, wenn man setzt: $S_\mu^{(\nu)} = 1 - a_\mu^{(\nu)}$. Das zweite findet sich als Beispiel 4) auf S. 277, das dritte § 43, Nr. 2, S. 285 (beide mit der unerheblichen Modifikation, daß *hier* der Summand 1 im Nenner hinzugefügt wurde, damit die betreffenden Ausdrücke auch noch für $\mu = \nu = 0$ einen Sinn behalten).

fache Form der Reihenglieder $u_\mu^{(\nu)}$ liefert noch der folgende, im übrigen ganz analog wie die obigen sich verhaltende Ausdruck:

$$(36)\qquad S_\mu^{(\nu)} = \left(\frac{\mu+1}{\mu+2}\right)^{\nu+1},$$

nämlich:

$$u_0^{(0)} = \frac{1}{2}, \quad \text{im übrigen: } u_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu+1}\cdot\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^\nu - \frac{1}{\mu+2}\cdot\left(\frac{\mu+1}{\mu+2}\right)^\nu.$$

6. Genügen die Glieder $u_\mu^{(\nu)}$ durchweg der Bedingung, $\geqq 0$ zu sein, so bilden die $S_\mu^{(\nu)}$ allemal eine *monotone (niemals abnehmende)* Folge positiver Zahlen. Daraus ergeben sich aber mit Rücksicht auf § 40, Nr. 3 (S. 257) und § 43, Nr. 1 (S. 285, Gl. (1b)) die folgenden Sätze:

(V) *Ist $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ und bleibt $S_\mu^{(\nu)}$ unter einer endlichen Zahl $g$, so konvergiert die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ gegen eine bestimmte Summe $S$. Zugleich konvergiert jede Zeile und jede Kolonne, und die Reihe der Zeilen- und diejenige der Kolonnensummen konvergiert gleichfalls gegen die Summe $S$.*

(VI) *Ist $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$, so zieht jede der drei Gleichungen:*

$$(37)\qquad \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S$$

*die beiden anderen nach sich. Dies gilt auch noch, wenn $+\infty$ an die Stelle der bestimmten positiven Zahl $S$ tritt.*

Die Sätze (V) und (VI) bleiben offenbar auch gültig, wenn unter den Gliedern $u_\mu^{(\nu)}$ *negative* Zahlen in *endlicher* Anzahl vorkommen; ebenso, wenn *durchweg* oder nach Ausschluß einer *endlichen* Anzahl $u_\mu^{(\nu)} \leqq 0$. (Dabei muß natürlich die Voraussetzung von (V) lauten: $\left|S_\mu^{(\nu)}\right| < g$.)

## § 63. Beziehungen zwischen einer Doppelreihe und der aus den Diagonalsummen gebildeten einfachen Reihe.

1. Transformiert man das *zweifach-unendliche* Schema:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \quad u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \cdots + u_\mu^{(0)} + \cdots \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \cdots + u_\mu^{(1)} + \cdots \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \cdots + u_\mu^{(\nu)} + \cdots \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right.$$

in eine *einfach-unendliche* Reihe, indem man die Glieder $u_\mu^{(\nu)}$ nach „*Diagonalen*“ ordnet, d. h. indem man bildet:

$$(2) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu w_\nu, \quad \text{wo:}\ w_\nu = u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \cdots + u_{\nu-1}^{(1)} + u_\nu^{(0)},$$

so besteht zwischen der *Doppelreihe* der $u_\mu^{(\nu)}$ und der *einfach-unendlichen Reihe* $\sum_0^\infty{}^\nu w_\nu$ eine vollkommene *Übereinstimmung*, sobald $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ ist.

Wie nämlich ein Blick auf das Schema:

$$(3) \qquad \begin{cases} \quad u_0^{(0)} + \cdots + u_n^{(0)} + \cdots + u_{2n}^{(0)} \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + u_0^{(n)} + \cdots + u_n^{(n)} \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + u_0^{(2n)} \end{cases}$$

unmittelbar zeigt, gilt alsdann die doppelte Ungleichung:

$$(4) \qquad \sum_0^n{}^\nu w_\nu \leqq S_n^{(n)} \leqq \sum_0^{2n}{}^\nu w_\nu .$$

Wenn nun die *Doppelreihe* gegen die Summe $S$ konvergiert, so hat man speziell $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(n)} = S$ und daher nach Ungl. (4):

$$(5) \qquad \sum_0^n{}^\nu w_\nu \leqq S.$$

Daraus folgt zunächst, wegen $w_\nu \geqq 0$, die *Konvergenz* der Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu w_\nu$ und sodann aus (4) für $n \longrightarrow \infty$:

$$(6) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu w_\nu = S.$$

*Umgekehrt:* Wenn $\sum_0^\infty{}^\nu w_\nu$ gegen die Summe $S$ konvergiert, so folgt zunächst unmittelbar aus Ungl. (4), daß:

$$(7) \qquad \lim_{n\to\infty} S_n^{(n)} = S.$$

Alsdann muß aber wegen der *Monotonie* der Zahlenfolge $S_\mu^{(\nu)}$ auch allgemein:

$$(8) \qquad \lim_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)} = S$$

sein (§ 40, S. 259, Zusatz).

Es ergibt sich hieraus schließlich noch, daß *die Doppelreihe* der $u_\mu^{(\nu)}$ und *die Reihe* $\sum_0^\infty {}^\nu w_\nu$ auch allemal *gleichzeitig divergieren* (nämlich nach $+\infty$), wenn *eine* der beiden Reihen *divergiert.*

Faßt man dieses Resultat mit dem Satze (VI) des vorigen Paragraphen zusammen, so ergibt sich an dessen Stelle der folgende noch etwas allgemeinere Satz:

*Ist* $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$, *so zieht jede der vier Gleichungen*[1]*):*

$$\text{(9)} \quad \sum_0^\infty {}^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty {}^\nu \sum_0^\infty {}^\mu u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty {}^\mu \sum_0^\infty {}^\nu u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty {}^\nu w_\nu = S$$

*die drei anderen nach sich, gleichgültig, ob S eine bestimmte Zahl vorstellt oder unendlich groß ist.*

2. Um die Beziehung zwischen einer *beliebigen* Doppelreihe $\sum_0^\infty {}^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$ und der Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu w_\nu$ festzustellen, schicken wir den folgenden Hilfssatz voraus, welcher eine Verallgemeinerung eines früher mitgeteilten Cauchyschen Satzes über den Grenzwert eines arithmetischen Mittels (§ 45, Nr. 1, S. 305) bildet:

*Bleiben die Zahlen* $a_\mu^{(\nu)}$. $\begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \cdots \\ \nu = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix}$ *numerisch unter einer endlichen Zahl g und ist:*

$$\text{(10)} \qquad \lim_{\mu,\nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = a$$

*(wo a eine bestimmte Zahl inkl.* 0 *vorstellt), so wird auch:*

$$\text{(11)} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}^{(1)} + a_n^{(0)}}{n+1} \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n {}^\mu a_\mu^{(n-\mu)} = a.$$

Beweis. Man hat zunächst identisch:

$$\text{(12)} \qquad \sum_0^n {}^\mu a_\mu^{(n-\mu)} - (n+1) \cdot a = \sum_0^n {}^\mu \left(a_\mu^{(n-\mu)} - a\right).$$

Da nach Voraussetzung: $\lim_{\mu,\nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = a$, so muß sich nach Annahme einer

---

1) Der auf die drei letzten Gleichungen bezügliche Teil des Satzes ergab sich schon bei früherer Gelegenheit: § 46, Nr. 4 (S. 317, Gl. (23)).

beliebig kleinen positiven Zahl $\varepsilon$ eine Zahl $m$ so fixieren lassen, daß:

$$(13) \qquad \left| a_\mu^{(\nu)} - a \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m, \ \nu \geqq m.$$

Nimmt man nun in Gl. (12) $n > 2m$ (also: $n - m > m$) an und schreibt jene Gleichung folgendermaßen:

$$(14) \qquad \sum_0^n {}^\mu a^{(n-\mu)} - (n+1)a$$

$$= \sum_0^m {}^\mu \left(a_\mu^{(n-\mu)} - a\right) + \sum_{m+1}^{n-m} {}^\mu \left(a_\mu^{(n-\mu)} - a\right) + \sum_{n-m+1}^{n} {}^\mu \left(a_\mu^{(n-\mu)} - a\right)$$

so wird in der *zweiten* Summe auf der rechten Seite durchweg:

$$\left| a_\mu^{(n-\mu)} - a \right| \leqq \varepsilon,$$

in der *ersten* und *dritten* zum mindesten:

$$\left| a_\mu^{(n-\mu)} - a \right| \leqq \left| a_\mu^{(n-\mu)} \right| + |a| < g + |a|,$$

und daher:

$$(15) \qquad \left| \sum_0^n {}^\mu a_\mu^{(n-\mu)} - (n+1)a \right| < (2m+1)\cdot(g+|a|) + (n-2m)\cdot\varepsilon$$

oder:

$$(16) \qquad \left| \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n {}^\mu a_\mu^{(n-\mu)} - a \right| < \frac{2m+1}{n+1}\cdot(g+|a|) + \left(1 - \frac{2m+1}{n+1}\right)\cdot\varepsilon.$$

Läßt man jetzt $n$ ins Unendliche wachsen, so wird:

$$(17) \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n {}^\mu a_\mu^{(n-\mu)} - a \right| \leqq \varepsilon,$$

also schließlich, da $\varepsilon$ jede beliebig kleine Zahl bedeuten kann:

$$(18) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n {}^\mu a_\mu^{(n-\mu)} = a, \quad \text{q. e. d.}$$

3. Nunmehr können wir den folgenden Satz beweisen:

*Besitzt die konvergente Doppelreihe:*

$$\sum_0^\infty {}^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)} = S$$

*die Eigenschaft, daß jede einzelne Zeile und Kolonne konvergiert*

*oder innerhalb endlicher Grenzen oszilliert, so kann die Reihe* $\sum_0^\infty {}_\nu w_\nu$ *nur konvergieren oder oszillieren*[1]) *und zwar ist im Falle der Konvergenz stets auch:*

$$\sum_0^\infty {}_\nu w_\nu = S.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß infolge der bezüglich der einzelnen Zeilen und Kolonnen gemachten Voraussetzung $\left|S_\mu^{(\nu)}\right|$ für *alle* möglichen $\mu$, $\nu$ *unter einer festen Zahl* $g$ bleiben muß (was ja aus der bloßen Existenz eines *endlichen* $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)}$ noch keineswegs folgen würde).

Wegen der *Konvergenz* der Doppelreihe gegen die Summe $S$ lassen sich jeder positiven Zahl $\varepsilon$ zwei Zahlen $m$, $n$ zuordnen, sodaß:

$$(19) \qquad \left|S_\mu^{(\nu)} - S\right| < \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n.$$

also:

$$S - \varepsilon < S_\mu^{(\nu)} < S + \varepsilon,$$

und somit:

$$(20) \qquad \left|S_\mu^{(\nu)}\right| < |S| + \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n.$$

Betrachtet man jetzt die ersten $n$ *Zeilen* der Doppelreihe, so bleibt nach Voraussetzung *die Summe jeder einzelnen*, wieviele Glieder man auch summieren mag, *numerisch unter einer endlichen Grenze.* Dasselbe gilt also auch für diejenigen Summen, welche entstehen, wenn man die entsprechenden Glieder der ersten $2, 3, \cdots, n$ Zeilen addiert, sodaß man setzen kann:

$$(21) \qquad \left|S_\mu^{(\nu)}\right| < g' \quad \text{für: } \mu = 0, 1, 2, \cdots \textit{ in inf.},\ \nu < n,$$

wo $g'$ eine bestimmte positive Zahl bedeutet.

Analog ergibt sich durch Betrachtung der ersten $m$ Kolonnen:

$$(22) \qquad \left|S_\mu^{(\nu)}\right| < g'' \quad \text{für: } \mu < m,\ \nu = 0, 1, 2, \cdots, \textit{ in inf.}$$

Bedeutet jetzt $g$ eine Zahl, die von *keiner* der drei Zahlen $|S| + \varepsilon$, $g'$, $g''$ überstiegen wird, so bestehen alle drei Bedingungen (20), (21), (22) *gleichzeitig*, sobald man jene drei Zahlen durch $g$ ersetzt, d. h. es ergibt sich schließlich:

$$(23) \qquad \left|S_\mu^{(\nu)}\right| < g \quad \text{für: } \begin{cases} \mu = 0, 1, 2, \cdots \textit{ in inf.} \\ \nu = 0, 1, 2, \cdots \textit{ in inf.} \end{cases}$$

---

1) Sie kann also niemals *eigentlich divergieren*, wohl aber ein *unendliches Grenzintervall* besitzen (s. das Beispiel in Nr. 4).

Nun werde gesetzt:

(24)
$$w_0 + w_1 + \cdots + w_\nu = W_\nu,$$

so hat man für $\nu \geqq 1$:

$$\begin{array}{llll} W_\nu = & u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \cdots + u_{\nu-2}^{(0)} + u_{\nu-1}^{(0)} + u_\nu^{(0)} = & & S_\nu^{(0)} \\ & + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \cdots + u_{\nu-2}^{(1)} + u_{\nu-1}^{(1)} & & + (S_{\nu-1}^{(1)} - S_{\nu-1}^{(0)}) \\ & + u_0^{(2)} + u_1^{(2)} + \cdots + u_{\nu-2}^{(2)} & & + (S_{\nu-2}^{(2)} - S_{\nu-2}^{(1)}) \\ & + \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot & & + \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ & + u_0^{(\nu)} & & + (S_0^{(\nu)} - S_0^{(\nu-1)}) \end{array}$$

oder, anders geordnet:

(25) $$W_\nu = S_\nu^{(0)} + S_{\nu-1}^{(1)} + \cdots + S_1^{(\nu-1)} + S_0^{(\nu)} - (S_{\nu-1}^{(0)} + S_{\nu-2}^{(1)} + \cdots + S_0^{(\nu-1)}).$$

Substituiert man hier der Reihe nach $\nu = 1, 2, 3, \cdots, n$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} W_1 &= S_1^{(0)} + S_0^{(1)} - S_0^{(0)} \\ W_2 &= S_2^{(0)} + S_1^{(1)} + S_0^{(2)} - (S_1^{(0)} + S_0^{(1)}) \\ W_3 &= S_3^{(0)} + S_2^{(1)} + S_1^{(2)} + S_0^{(3)} - (S_2^{(0)} + S_1^{(1)} + S_0^{(2)}) \\ &\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ W_n &= S_n^{(0)} + S_{n-1}^{(1)} + \cdots + S_0^{(n)} - (S_{n-1}^{(0)} + S_{n-2}^{(1)} + \cdots + S_0^{(n-1)}), \end{aligned}$$

und wenn man diese $n$ Gleichungen zu der folgenden addiert:

$$W_0 = S_0^{(0)},$$

so resultiert, nach Hinzufügung des Faktors $\frac{1}{n+1}$:

(26)
$$\frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n {}_\nu W_\nu = \frac{1}{n+1} \left(S_n^{(0)} + S_{n-1}^{(1)} + \cdots + S_0^{(n)}\right).$$

Hieraus folgt aber für $n \to \infty$, mit Berücksichtigung der Voraussetzung: $\lim\limits_{\mu, \nu \to \infty} S_\mu^{(\nu)} = S$ und des unmittelbar zuvor bewiesenen Hilfssatzes, daß:

(27)
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n {}_\nu W_\nu = S.$$

Wenn nun $\sum\limits_0^\infty {}_\nu w_\nu$ *konvergiert* und etwa:

(28)
$$\sum_0^\infty {}_\nu w_\nu = \lim_{\nu \to \infty} W_\nu = W$$

ist, so wird andererseits nach dem oben zitierten Cauchyschen Satze vom Grenzwerte eines arithmetischen Mittels auch:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n{}_\nu W_\nu = W, \tag{29}$$

sodaß sich aus der Verbindung der Gleichungen (27)—(29) schließlich ergibt:

$$\sum_0^\infty{}_\nu w_\nu = S. \tag{30}$$

Wäre hingegen $\sum_0^\infty{}_\nu w_\nu$ *eigentlich divergent*, also $\lim\limits_{\nu\to\infty} W_\nu = +\infty$ bzw. $= -\infty$, so müßte ebenfalls nach jenem Cauchyschen Satze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n{}_\nu W_\nu = +\infty \quad \text{bzw.} \quad = -\infty$$

sein, was der Gleichung (27) *widerspräche*. Daraus folgt mit Notwendigkeit, daß die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu w_\nu$, falls sie *nicht konvergiert*, jedenfalls nur *oszillieren* kann.

4. Um an einigen einfachen Beispielen zu zeigen, daß die *beiden* im vorigen Satze angedeuteten *Möglichkeiten* (nämlich außer der *Konvergenz* der Diagonalenreihe $\sum w_\nu$ auch deren *Oszillieren*) auch *wirklich* eintreten können, werde gesetzt:

$$u_\mu^{(\nu)} = v_{\mu+\nu} - v_{\mu+\nu+1}, \tag{31}$$

wobei $\sum_0^\infty{}_\nu v_\nu$ als (bedingt oder unbedingt) *konvergent* angenommen wird. Die so definierte *Doppelreihe* wird durch das Schema dargestellt:

$$\text{(32)} \begin{cases} (v_0 - v_1) & +(v_1 - v_2) & +(v_2 - v_3) & + \cdots + (v_\mu - v_{\mu+1}) & + \cdots \\ +(v_1 - v_2) & +(v_2 - v_3) & +(v_3 - v_4) & + \cdots + (v_{\mu+1} - v_{\mu+2}) & + \cdots \\ +(v_2 - v_3) & +(v_3 - v_4) & +(v_4 - v_5) & + \cdots + (v_{\mu+2} - v_{\mu+3}) & + \cdots \\ + \cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \\ +(v_\nu - v_{\nu+1}) & +(v_{\nu+1} - v_{\nu+2}) & +(v_{\nu+2} - v_{\nu+3}) & + \cdots + (v_{\mu+\nu} - v_{\mu+\nu+1}) & + \cdots \end{cases}$$

und *konvergiert* offenbar gegen die Summe: $\sum_0^\infty{}_\nu v_\nu$. Denn man hat:

$$S_m^{(n)} = \sum_0^n{}_\nu v_\nu - \sum_{m+1}^{m+n+}{}_\nu v_\nu = \sum_0^m{}_\nu v_\nu - \sum_{n+1}^{m+n+1}{}_\nu v_\nu. \tag{33}$$

Die einzelnen *Zeilen* und *Kolonnen* sind gleichfalls *konvergent* und ihre *Summen* besitzen der Reihe nach die Werte $v_0, v_1, v_2, \cdots$.

Andererseits ergibt sich, wie das Schema (32) zeigt:

$$w_\nu = (\nu + 1) \cdot (v_\nu - v_{\nu+1}) \tag{34}$$

und daher:

$$\begin{aligned} \sum_0^{n-1}{}_\nu w_\nu &= (v_0 - v_1) + 2(v_1 - v_2) + 3(v_2 - v_3) + \cdots + n(v_{n-1} - v_n) \\ &= \sum_0^{n-1}{}_\nu v_\nu - n \cdot v_n. \end{aligned} \tag{35}$$

Diese Gleichung lehrt, daß $\sum_0^\infty{}_\nu w_\nu$ dann und nur dann *konvergiert*, wenn $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot v_n$ eine *bestimmte Zahl* ist. Letzteres ist aber wegen der vorausgesetzten Konvergenz von $\sum_0^\infty{}_\nu v_\nu$ nur in *der* Weise möglich, daß:

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot v_n = 0. \tag{36}$$

Denn eine Beziehung von der Form: $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot v_n = a$, wo $|a| > 0$, würde ja allemal die *Dive genz* der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu v_\nu$ zur Folge haben.

Hiernach ergibt sich also, daß in der Tat (Gl. (35) und (36)):

$$\sum_0^\infty{}_\nu w_\nu = \sum_0^\infty{}_\nu v_\nu \quad \text{d. h.} \quad = \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} (v_{\mu+\nu} - v_{\mu+\nu+1}) \tag{37}$$

wird, wenn $\sum_0^\infty{}_\nu w_\nu$ *überhaupt konvergiert*. Und man hat, um Beispiele dieser Art zu gewinnen, $v_\nu$ lediglich so zu wählen, daß $\sum_0^\infty{}_\nu v_\nu$ *konvergiert* und die Bedingung (36) befriedigt wird $\left(\text{z. B. } v_\nu = \frac{1}{(\nu+1)^2},\ \frac{(-1)^\nu}{(\nu+2)\lg(\nu+2)}\right)$.

Da ferner — wegen der Konvergenz von $\sum_0^\infty{}_\nu v_\nu$ — $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot v_n$ auch *nicht* $= +\infty$ bzw. $= -\infty$ sein kann, so erkennt man zunächst aus Gl. (35), daß $\sum_0^\infty{}_\nu w_\nu$ in keinem Falle *eigentlich divergieren* kann.

Schließlich bleibt noch die eine Möglichkeit offen, daß $\underline{\lim}_{n\to\infty} n \cdot v_n$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} n \cdot v_n$ *verschieden* ausfallen. In diesem Falle *oszilliert* die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$, wie Gl. (35) zeigt, in den Grenzen:

$$(38)\qquad \sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu - \underline{\lim}_{n\to\infty} n \cdot v_n \quad \text{und:} \quad \sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu - \overline{\lim}_{n\to\infty} n \cdot v_n .$$

(Beispiele. Man setze:

$$v_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu+1}, \quad \text{also:} \quad u_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\mu+\nu+1} + \frac{1}{\mu+\nu+2}\right).$$

Alsdann wird:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} n \cdot v_n = -1, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} n \cdot v_n = +1$$

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu = \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu+1} = \lg 2$$

und es ergeben sich somit:

$$\lg 2 - 1 \quad \text{und} \quad \lg 2 + 1$$

als die *Oszillationsgrenzen* der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$.

Setzt man dagegen:

$$v_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu+1}}, \quad \text{also:} \quad u_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu+\nu+1}} + \frac{1}{\sqrt{\mu+\nu+2}}\right),$$

so wird:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} n \cdot v_n = -\infty, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} n \cdot v_n = +\infty,$$

sodaß also die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ hier in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ oszilliert.)

5. Es verdient ausdrücklich hervorgehoben zu werden, daß die bei der Formulierung des vorigen Satzes gemachte Einschränkung, wonach die Zeilen- und Kolonnenreihen entweder *konvergieren* oder *endliche Oszillationsgrenzen* besitzen sollten, nicht etwa lediglich *der Beweisführung zuliebe* eingeführt wurde: dieselbe bildet vielmehr eine *wesentliche* Voraussetzung in *dem* Sinne, daß der Satz *hinfällig werden kann*, wenn jene Bedingung *nicht* erfüllt ist.

Dies läßt sich in sehr einfacher Weise aus der folgenden Überlegung ersehen. Es sei: $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S$ *irgendeine konvergente* Doppelreihe, bei

der zum mindesten die zwei ersten Zeilen konvergieren, für welche außerdem die Beziehung besteht: $\sum_0^\infty{}^{\nu} w_\nu = S$.

Man bilde nun aus dieser Doppelreihe eine neue, indem man die Glieder der *ersten* Zeile, also die $u_\mu^{(0)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots)$, durch $u_\mu^{(0)} + v_\mu$, die der *zweiten*, also die $u_\mu^{(1)}$, durch $u_\mu^{(1)} - v_\mu$ ersetzt, wo die $v_\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots)$ nach Belieben zu wählende positive Zahlen bedeuten. Man erhält auf diese Weise das folgende Schema:

$$(39)\begin{cases} (u_0^{(0)}+v_0) + (u_1^{(0)}+v_1) + \cdots + (u_{\nu-1}^{(0)}+v_{\nu-1}) + (u_\nu^{(0)}+v_\nu) + \cdots \\ + (u_0^{(1)}-v_0) + (u_1^{(1)}-v_1) + \cdots + (u_{\nu-1}^{(1)}-v_{\nu-1}) + (u_\nu^{(1)}-v_\nu) + \cdots \\ + u_0^{(2)} \quad + u_1^{(2)} \quad + \cdots + u_{\nu-1}^{(2)} \quad + u_\nu^{(2)} \quad + \cdots \\ + \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ + u_0^{(\nu)} \quad + u_1^{(\nu)} \quad + \cdots + u_{\nu-1}^{(\nu)} \quad + u_\nu^{(\nu)} \quad + \cdots \\ + \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{cases}$$

und erkennt unmittelbar, daß auch *diese Doppelreihe gegen die Summe S konvergiert.*

Bezeichnet man sodann die Diagonalsummen des Schemas (39) mit $w_\nu'$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$, so wird:

$$(40)\begin{cases} w_0' = u_0^{(0)} + v_0 \\ w_\nu' = u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \cdots + u_{\nu-2}^{(2)} + (u_{\nu-1}^{(1)} - v_{\nu-1}) + (u_\nu^{(0)} + v_\nu) \\ \quad = w_\nu - v_{\nu-1} + v_\nu \qquad\qquad (\nu \geqq 1) \end{cases}$$

und daher.

$$(41)\qquad \sum_0^n{}^{\nu} w_\nu' = \sum_0^n{}^{\nu} w_\nu + v_n.$$

Werden nun die $v_\nu$ so gewählt, daß $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ *endlich* und *von Null verschieden* ausfällt, so *divergieren* die beiden ersten Zeilen des Schemas (39), während zugleich aus Gl. (41) sich ergibt:

$$(42)\qquad \sum_0^\infty{}^{\nu} w_\nu' = S + v,$$

d. h. die *Reihe der Diagonalen* bleibt zwar *konvergent*, ihre *Summe* ist aber *verschieden* von derjenigen der betreffenden *Doppelreihe.* (Beispiel: $v_\nu = 1$.)

Nimmt man dagegen $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$ (z. B. $v_\nu = \nu$), bzw. wählt man die $v_\nu$ so, daß $\underline{\lim}_{n\to\infty} v_n$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} v_n$ *verschieden* ausfallen (z. B. $v_\nu = 2 + (-1)^\nu$, $v_\nu = \nu^{(-1)^\nu}$), so lehrt Gl. (41), daß die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu w_\nu'$ *eigentlich divergiert* bzw. *oszilliert.*

Die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu w_\nu'$ verliert also in den betrachteten Fällen tatsächlich jene Eigenschaften, welche ihr nach dem Satze von Nr. 3 zukommen, falls die *Zeilen* und *Kolonnen konvergieren* oder *innerhalb endlich bleibender Grenzen oszillieren.*

## § 64. Absolut konvergente Doppelreihen. – Zusammenfallen von absoluter und unbedingter Konvergenz. — Bedingt konvergente Doppelreihen.

1. Die *Doppelreihe* $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$ heißt *absolut konvergent,* wenn die *Doppelreihe* der $\left|u_\mu^{(\nu)}\right|$ *konvergiert.*

Um vor allem nachzuweisen, daß eine in diesem Sinne *absolut konvergente* Doppelreihe *überhaupt konvergiert,* werde gesetzt:

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{l} \quad |u_0^{(0)}| + |u_1^{(0)}| + \cdots + |u_\mu^{(0)}| \\ + |u_0^{(1)}| + |u_1^{(1)}| + \cdots + |u_\mu^{(1)}| \\ + \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + |u_0^{(\nu)}| + |u_1^{(\nu)}| + \cdots + |u_\mu^{(\nu)}| \end{array}\right\} = \bar{S}_\mu^{(\nu)},$$

während $S_\mu^{(\nu)}$ wiederum die entsprechende Summe der $u_\mu^{(\nu)}$ bezeichnen mag. Da sodann allgemein:

$$(2)\qquad \left|\sum u_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \sum \left|u_\mu^{(\nu)}\right|,$$

falls sich die Summation bei *beiden* Summen über die nämlichen Werte von $\mu$ und $\nu$ erstreckt, so hat man:

$$(3)\qquad \left|S_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} - S_m^{(n)}\right| \leqq \bar{S}_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} - \bar{S}_m^{(n)}$$

und hieraus folgt unmittelbar, daß *gleichzeitig* mit $\lim_{m,n\to\infty} \bar{S}_m^{(n)}$ stets auch $\lim_{m,n\to\infty} S_m^{(n)}$ *einen bestimmten Wert* besitzt, sodaß also mit der Doppelreihe der $\left|u_\mu^{(\nu)}\right|$ stets auch diejenige der $u_\mu^{(\nu)}$ *konvergiert.*

Unmittelbar aus dem Begriffe der *absoluten* Konvergenz ergeben sich die folgenden Sätze:

*Eine konvergente Doppelreihe, welche negative (oder positive) Glieder nur in endlicher Anzahl enthält, ist allemal absolut konvergent.* —

*Enthält eine absolut konvergente Doppelreihe sowohl positive als negative Glieder in unbegrenzter Anzahl, so bilden sowohl die positiven als die negativen Glieder je eine (absolut) konvergente Doppelreihe.*

*Umgekehrt konvergiert eine Doppelreihe absolut, wenn sowohl die positiven als die negativen Glieder je eine konvergente Doppelreihe bilden.*

2. Die *absolut konvergenten* Doppelreihen zeigen ein ganz analoges Verhalten, wie *konvergente Doppelreihen* mit *positiven* Gliedern. Insbesondere gilt der Satz:

*Ist die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ absolut konvergent und*

$$\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S, \tag{4}$$

*so konvergiert auch jede einzelne Zeile und Kolonne und die Reihe der Zeilen- bzw. Kolonnensummen absolut und man hat auch:*

$$\sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S \quad \textit{(Reihe der Zeilensummen)}, \tag{5}$$

$$\sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S \quad \textit{(Reihe der Kolonnensummen)}. \tag{6}$$

*Ebenso konvergiert die Reihe der Diagonalen absolut und zwar auch dann noch, wenn man die einzelnen $u_\mu^{(\nu)}$ als Glieder der Reihe auffaßt. Zugleich hat man:*

$$\sum_0^\infty{}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \cdots + u_\nu^{(0)}\right) = S \quad \textit{(Reihe der Diagonalen)}. \tag{7}$$

Beweis. Da nach Voraussetzung die *Doppelreihe* der $\left|u_\mu^{(\nu)}\right|$ *konvergiert*, so konvergiert nach Satz (V) des § 62 (S. 459) in dem Schema der $\left|u_\mu^{(\nu)}\right|$ jede einzelne *Zeile* und *Kolonne*, ebenso die *Reihe der Zeilen-* und der *Kolonnensummen* und die *Reihe der Diagonalen*. Mit anderen Worten: in dem Schema der $u_\mu^{(\nu)}$ ist jede *Zeile* und *Kolonne*, die *Reihe*

*der Zeilen-* und *Kolonnensummen* und die *Reihe der Diagonalen* ***absolut konvergent***, übrigens auch wenn man bei der letzteren durchweg die einzelnen $u_\mu^{(\nu)}$ als die Reihenglieder auffaßt.

Es handelt sich also nur noch darum zu zeigen, daß die betreffenden Reihen sämtlich die Summe $S$ besitzen.

Für die *Reihe der Diagonalen* (Gl. (7)) folgt dies aber schon unmittelbar aus dem Satze in Nr. 3 des vorigen Paragraphen und für die iterierten Reihen (5) und (6) aus dem Satze (IIa) des § 62 (S. 451), übrigens auch mit Hilfe eines früher bewiesenen Satzes (§ 58, Nr. 4, S. 410), nach welchem (unter der hier gemachten Voraussetzung der *absoluten* Konvergenz) die Existenz der Gleichung (7) stets diejenige von (5) und (6) nach sich zieht.

3. Der soeben bewiesene Satz läßt sich leicht in folgender Weise umkehren und erweitern:

*Von den* ***vier*** *Gleichungen:*

$$(8)\qquad \begin{cases} \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \\ \sum_0^\infty{}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \cdots + u_\nu^{(0)}\right) = S \end{cases}$$

*zieht* ***jede*** *einzelne* ***die drei anderen*** *nach sich, wenn die in der Voraussetzung auftretende Reihe bei Vertauschung der $u_\mu^{(\nu)}$ mit ihren absoluten Beträgen konvergent bleibt.*

Aus dieser letzteren Annahme folgt nämlich (entweder ohne weiteres oder nach dem Satze am Schlusse von § 63, Nr. 1, S. 461), daß die *Doppelreihe* der $\left|u_\mu^{(\nu)}\right|$ *konvergent*, also diejenige der $u_\mu^{(\nu)}$ *absolut konvergent* ist. Hierauf ergibt sich aber alles weitere aus dem Satze der vorigen Nummer.

In dem obigen Satze ist offenbar der früher bewiesene (§ 58, Nr. 4, S. 411) sogenannte *Cauchysche Doppelreihensatz* wiederum als Teil enthalten.

4. Eine *konvergente Doppelreihe* heißt ***unbedingt konvergent***, wenn jede durch *Umordnung* der Glieder daraus hervorgehende Doppelreihe *gegen dieselbe Summe konvergiert*, wie die ursprüngliche. Dabei betrachten wir eine *Doppelreihe* $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, v_\mu^{(\nu)}$ dann und nur dann als durch „*Umordnung*“ aus der *Doppelreihe* $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ hervorgegangen, wenn *jedem* Gliede $u_\mu^{(\nu)}$ in

umkehrbar eindeutiger Weise ein ihm gleiches $v_\varrho^{(\sigma)}$ zugeordnet werden kann. Es muß also *jedes Glied*, das in dem Schema:

$$\begin{matrix} u_0^{(0)} & u_1^{(0)} & u_2^{(0)} & \ldots\ldots \\ u_0^{(1)} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \ldots\ldots \\ u_0^{(2)} & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{matrix}$$

an einer *bestimmten endlichen Stelle* erscheint, auch in dem Schema:

$$\begin{matrix} v_0^{(0)} & v_1^{(0)} & v_2^{(0)} & \ldots\ldots \\ v_0^{(1)} & v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \ldots\ldots \\ v_0^{(2)} & v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{matrix}$$

einen *bestimmten endlichen Platz* einnehmen *und umgekehrt.*

Es gilt nun zunächst der folgende Satz:

*Jede absolut konvergente Doppelreihe ist unbedingt konvergent.*

Beweis. Es werde das allgemeine Glied der ursprünglich vorgelegten Doppelreihe wiederum mit $u_\mu^{(\nu)}$, ihre Summe mit $S$ bezeichnet, während $v_\mu^{(\nu)}$ das allgemeine Glied einer durch *Umordnung* daraus hervorgegangenen Doppelreihe vorstellen soll. Dann erkennt man zunächst, daß auch die Doppelreihe der $v_\mu^{(\nu)}$ *konvergiert* und zwar *absolut.* Denn setzt man etwa: $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} \left|u_\mu^{(\nu)}\right| = \bar{S}$, so muß *jede begrenzte* Doppelsumme, welche aus Gliedern $\left|v_\mu^{(\nu)}\right|$ gebildet wird, stets *unterhalb* $\bar{S}$ bleiben, sodaß also nach § 62, Satz (V) (S. 459) $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} \left|v_\mu^{(\nu)}\right|$ *konvergiert* und $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} v_\mu^{(\nu)}$ *absolut konvergiert.* Bezeichnet man dann die Summe dieser letzteren Doppelreihe mit $T$, so wird nach dem Satze von Nr. 2 (Gl. (7)):

$$(9)\qquad \begin{cases} \sum_0^\infty{}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \cdots + u_\nu^{(0)}\right) = S, \\ \sum_0^\infty{}_\nu \left(v_0^{(\nu)} + v_1^{(\nu-1)} + \cdots + v_\nu^{(0)}\right) = T. \end{cases}$$

Jede dieser *einfach-unendlichen* Reihen ist aber *absolut* konvergent, auch wenn man die einzelnen Glieder $u_\mu^{(\nu)}$ bzw. $v_\mu^{(\nu)}$ als Reihenglieder auf-

faßt. Die *zweite* stellt dann aber lediglich eine *Umordnung* der *ersten* dar und somit ergibt sich:

$$T = S,$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

5. Um auch die *Umkehrung* dieses Satzes beweisen zu können, schicken wir die folgende Bemerkung voraus.

Eine *einfach-unendliche* Zahlenfolge:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\cdots$$

läßt sich nach § 39, Nr. 1 (S. 247) auf unendlich viele Arten als *zweifach-unendliche* Folge anordnen, *am einfachsten* etwa in folgender Weise: man teile jene Folge in Gruppen, welche der Reihe nach $1, 3, 5, \cdots, (2\nu+1), \cdots$ Glieder enthalten, und ordne sodann jene Gruppen zu einem *unbegrenzt fortsetzbaren quadratischen Schema* in folgender Weise[1]):

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{rcccccccc}
(1) & u_1 & & u_4 & & u_9 & \cdot & u_{(\nu+1)^2} & \cdot\ \cdot \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
(2) & u_2 & \rightarrow & u_3 & & u_8 & \cdot & u_{\nu^2+2\nu} & \cdot\ \cdot \\
 & & & & & \uparrow & & \uparrow & \\
(3) & u_5 & \rightarrow & u_6 & \rightarrow & u_7 & \cdot & u_{\nu^2+2\nu-1} & \cdot \\
 & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\
 & & & & & & & \uparrow & \cdot\ \cdot \\
(\nu+1) & u_{\nu^2+1} & \rightarrow & u_{\nu^2+2} & \rightarrow & u_{\nu^2+3} & \rightarrow\ \cdot & u_{\nu^2+\nu+1} & \cdot\ \cdot \\
 & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\
 & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot
\end{array}\right.$$

Bezeichnet man jetzt mit $s_\mu^{(\nu)}$ die Summe aller derjenigen Glieder, welche den ersten $\nu$ *Zeilen* und $\mu$ *Kolonnen* dieses Schemas angehören, so hat man speziell:

$$(11)\qquad s_n^{(n)} = \sum_1^{n^2} u_\nu .$$

Wenn nun $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^{(n)}$ einen bestimmten Wert besitzt, so folgt daraus noch *nicht* das gleiche für $\lim\limits_{m,n\to\infty} s_m^{(n)}$, d. h. man kann daraus noch *keinen* Schluß auf die *Konvergenz* derjenigen *Doppelreihe* ziehen, welche durch das Schema (10) definiert wird.

Wenn dagegen $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^{(n)} = \pm\infty$ wird (oder wenn $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, s_n^{(n)}$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty}\, s_n^{(n)}$ *verschieden* ausfallen), so folgt *mit Sicherheit*, daß *kein endlicher* $\lim\limits_{m,n\to\infty} s_m^{(n)}$ *existiert*, und daß somit *die Doppelreihe* (10) *unter keinen Umständen konvergieren kann.*

1) Vgl. den umgekehrten Prozeß § 39, (6a) (S. 251).

6. Mit Benützung dieser Bemerkung beweisen wir jetzt den Satz:

*Jede unbedingt konvergente Doppelreihe* $\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ *ist auch absolut konvergent.*

Beweis. Zunächst folgt aus der Voraussetzung der *unbedingten* Konvergenz, daß nicht nur $\lim_{\mu,\nu\to\infty} u_\mu^{(\nu)} = 0$ (was nach § 62, S. 453, Gl. (17) bei *jeder konvergenten* Doppelreihe der Fall ist), sondern auch:

$$(12)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\mu\to\infty} u_\mu^{(\nu)} = 0 \quad \text{für: } \nu = 0, 1, 2, \cdots, \\ \lim\limits_{\nu\to\infty} u_\mu^{(\nu)} = 0 \quad \text{für: } \mu = 0, 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

Um dies einzusehen, braucht man nur die $(\nu+1)^{\text{te}}$ *Zeile* bzw. $(\mu+1)^{\text{te}}$ *Kolonne* mit der *Hauptdiagonale* zu vertauschen (wobei das eine Glied $u_\nu^{(\nu)}$ bzw. $u_\mu^{(\mu)}$ seinen Platz behält). Da die *Konvergenz* der Doppelreihe durch diese Umordnung nicht gestört werden soll, so müssen die Glieder *der nunmehrigen Hauptdiagonale* den Grenzwert 0 besitzen, woraus die Richtigkeit der Gleichungen (12) unmittelbar hervorgeht.

Nun schreibe man die Glieder der Doppelreihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$, ohne eins zu übergehen, als *einfach-unendliche Reihe* an (z. B. indem man das Schema der $u_\mu^{(\nu)}$ nach *Diagonalen* ordnet). Bezeichnet man sie in dieser Anordnung mit:

$$(13)\qquad u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_\nu,\ \cdots,$$

so ergibt sich zunächst aus (12) in Verbindung mit $\lim_{\mu,\nu\to\infty} u_\mu^{(\nu)} = 0$, daß:

$$(14)\qquad \lim_{\nu\to\infty} u_\nu = 0$$

sein muß.

Wird jetzt angenommen, daß die vorgelegte *Doppelreihe nicht absolut* konvergiert, also auch die aus den *Zeilen* der $|u_\mu^{(\nu)}|$ gebildete *iterierte Reihe nicht* konvergiert, so ergibt sich unmittelbar aus dem Satze von § 46, Nr. 3 (S. 312), daß auch die Reihe (13) *nicht absolut* konvergieren kann.

Hieraus folgt aber, daß sich die Glieder (13) auf Grund des *erweiterten Riemannschen Satzes* (§ 57, Nr. 3, S. 405) in eine Anordnung:

$$(15)\qquad v_1,\ v_2,\ v_3,\ \cdots,\ v_\nu,\ \cdots$$

von der Beschaffenheit bringen lassen, daß $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, v_\nu$ *eigentlich divergiert* (oder

in passender Weise[1]) *oszilliert*). Ordnet man jetzt die Glieder $v_\nu$ nach dem in voriger Nummer gelehrten Verfahren zu einem unbegrenzt fortsetzbaren quadratischen Schema an, so stellt dieses eine bloße Umordnung der ursprünglich vorgelegten Doppelreihe dar. Zugleich wird dann $\lim\limits_{\nu\to\infty} s_\nu^{(\nu)} = \pm\infty$ (bzw. $\underline{\lim}\limits_{\nu\to\infty} s_\nu^{(\nu)}$ und $\overline{\lim}\limits_{\nu\to\infty} s_\nu^{(\nu)}$ *verschieden*), sodaß die Doppelreihe in dieser neuen Anordnung *divergieren* würde.

Hieraus folgt aber, daß die *unbedingte* Konvergenz der Doppelreihe nur möglich ist, wenn dieselbe *absolut* konvergiert.

7. Nach den Sätzen in Nr. 4 und 6 erweisen sich also schließlich *absolute* und *unbedingte Konvergenz* dem Umfange nach als völlig gleichwertig. Insbesondere kann man dem Satze in Nr. 2 jetzt auch die folgende Form geben:

*Ist die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ unbedingt konvergent, so konvergiert auch jede Zeile und Kolonne, desgleichen die aus den Zeilen- bzw. Kolonnensummen gebildete Reihe, und die Summe der letzteren ist gleich der Summe der Doppelreihe, d. h. man hat:*

$$\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)}. \tag{16}$$

Im Falle der *unbedingten* Konvergenz wird also die Trennung der Begriffe „*Doppelreihe*" und „*iterierte Reihe*" entbehrlich, und hierdurch erscheint es bis zu einem gewissen Grade gerechtfertigt, wenn man eine *unbedingt* (absolut) *konvergente iterierte* Reihe häufig ohne weiteres als konvergente *Doppelreihe* bezeichnet.

8. Eine *Doppelreihe*, welche *konvergiert*, ohne *absolut zu konvergieren*, ist nur *bedingt konvergent*: sie kann, wie der Beweis in Nr. 6 zeigt, durch bloße *Umordnung* der Glieder stets in eine *divergente* Doppelreihe verwandelt werden. Zu den nur *bedingt* konvergenten Doppelreihen gehören z. B. *eo ipso* alle diejenigen konvergenten Doppelreihen, bei denen *irgendeine Zeile* oder *Kolonne divergiert*; ferner die in § 63, Nr. 4 (S. 467) betrachteten, bei denen *die Reihe der Diagonalen (uneigentlich) divergiert*: denn bei einer *unbedingt*, also *absolut* konvergierenden Doppelreihe ist ja die Reihe der Diagonalen stets *konvergent* (s. Nr. 2).

Es verdient bemerkt zu werden, daß eine *bedingt* konvergierende Doppelreihe dieser Art schon dadurch *divergent* werden kann, daß man

---

1) D. h. *so*, daß nicht gerade die Summen $\sum_1^{n^2}{}_\nu\, v_\nu$ eine *konvergente* Folge bilden.

in die einzelnen *Zeilen* oder *Kolonnen* eine passende Anzahl von *Nullen* einschaltet.[1])

Bedeutet nämlich:

$$(17)\quad \begin{cases} \phantom{+}u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \cdots + u_\mu^{(0)} + \cdots + u_\nu^{(0)} + \cdots \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \cdots + u_\mu^{(1)} + \cdots + u_\nu^{(1)} + \cdots \\ + \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + u_0^{(\mu)} + u_1^{(\mu)} + \cdots + u_\mu^{(\mu)} + \cdots + u_\nu^{(\mu)} + \cdots \\ + \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \cdots + u_\mu^{(\nu)} + \cdots + u_\nu^{(\nu)} + \cdots \\ + \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

eine *konvergente* Doppelreihe, für welche $\sum_0^\infty \nu\, w_\nu$ *divergiert*, falls wiederum:

$$(18)\qquad u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \cdots + u_{\nu-1}^{(1)} + u_\nu^{(0)} = w_\nu$$

gesetzt wird, so forme man das Schema (17) in *der* Weise um, daß man jeder Zeile so viele *Nullen* als Anfangsglieder hinzufügt, als ihr (oberer) Index angibt. Alsdann entsteht das folgende Schema:

$$(19)\quad \begin{cases} \phantom{+ 0 +}u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \cdots + u_\mu^{(0)} + \cdots + u_\nu^{(0)} + \cdots \\ + \ 0 \ + u_0^{(1)} + \cdots + u_{\mu-1}^{(1)} + \cdots + u_{\nu-1}^{(1)} + \cdots \\ + \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + \ 0 \ + \ 0 \ + \cdots + u_0^{(\mu)} + \cdots + u_{\nu-\mu}^{(\mu)} + \cdots \\ + \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + \ 0 \ + \ 0 \ + \cdots + \ 0 \ + \cdots + u_0^{(\nu)} + \cdots \\ + \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

(dessen *Kolonnen* offenbar aus den Gliedern je einer *Diagonale* des Schemas (17), im übrigen aus *Nullen* bestehen). Hier wird nun aber:

$$(20)\qquad S_\nu^{(\nu)} = w_0 + w_1 + \cdots + w_\nu,$$

sodaß also die *Doppelreihe* (19) in der Tat *divergieren* muß, da nicht einmal ein bestimmter $\lim\limits_{\nu \to \infty} S_\nu^{(\nu)}$ existiert.

---

1) Bei einer *unbedingt*, also *absolut* konvergierenden Doppelreihe erscheint dies wiederum ausgeschlossen, da die *Konvergenz* einer Doppelreihe mit *positiven* Gliedern und somit die *absolute* Konvergenz der vorgelegten Doppelreihe durch Hinzufügung beliebig vieler Summanden 0 nicht alteriert werden kann.

9. Um noch einen anderen Typus von eventuell nur *bedingt* konvergierenden Doppelreihen anzuführen, werde gesetzt:

$$u_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu} \cdot a_\mu^{(\nu)}, \tag{21}$$

wo die $a_\mu^{(\nu)}$ eine *monotone niemals zunehmende* Folge positiver Zahlen bedeuten, welche außer der Bedingung der *Monotonie*:

$$a_\mu^{(\nu)} \geqq a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} \quad \begin{pmatrix} \varrho = 0, 1, 2, \cdots \\ \sigma = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix} \tag{22}$$

noch der folgenden genügen:

$$a_\mu^{(\nu)} - a_{\mu+1}^{(\nu)} \geqq a_\mu^{(\nu+1)} - a_{\mu+1}^{(\nu+1)}, \tag{23}$$

anders geschrieben:

$$a_\mu^{(\nu)} + a_{\mu+1}^{(\nu+1)} \geqq a_\mu^{(\nu+1)} + a_{\mu+1}^{(\nu)}.$$

Außerdem soll:

$$\lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(0)} = 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} a_0^{(\nu)} = 0 \tag{24}$$

sein — woraus dann vermöge der *Monotonie* der $a_\mu^{(\nu)}$ folgt, daß allgemein:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 & (\nu = 0, 1, 2, \cdots) \\ \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 & (\mu = 0, 1, 2, \cdots) \\ \lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0. & \end{cases} \tag{25}$$

Die fragliche Doppelreihe wird dann dargestellt durch das Schema:

$$\begin{cases} \begin{array}{lllll} a_0^{(0)} & - a_1^{(0)} & + a_2^{(0)} & - \cdots + (-1)^\mu \cdot a_\mu^{(0)} & + \cdots \\ - a_0^{(1)} & + a_1^{(1)} & - a_2^{(1)} & + \cdots + (-1)^{\mu+1} \cdot a_\mu^{(1)} & + \cdots \\ + a_0^{(2)} & - a_1^{(2)} & + a_2^{(2)} & - \cdots + (-1)^{\mu+2} \cdot a_\mu^{(2)} & + \cdots \\ - \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ + (-1)^\nu \cdot a_0^{(\nu)} & - (-1)^\nu \cdot a_1^{(\nu)} & + (-1)^\nu \cdot a_2^{\nu} & - \cdots + (-1)^{\mu+\nu} \cdot a_\mu^{(\nu)} & + \cdots \\ + \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \end{array} \end{cases} \tag{26}$$

Um ihre *Konvergenz* zu erweisen, betrachten wir zunächst einen Ausdruck von der Form:

$$\left.\begin{cases} \begin{array}{lll} a_\mu^{(\nu)} & - a_{\mu+1}^{(\nu)} & + \cdots + (-1)^\varrho \cdot a_{\mu+\varrho}^{(\nu)} \\ - a_\mu^{(\nu+1)} & + a_{\mu+1}^{(\nu+1)} & - \cdots + (-1)^{\varrho+1} \cdot a_{\mu+\varrho}^{(\nu+1)} \\ + \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ + (-1)^\sigma \cdot a_\mu^{(\nu+\sigma)} & - (-1)^\sigma \cdot a_{\mu+1}^{(\nu+\sigma)} & + \cdots + (-1)^{\varrho+\sigma} \cdot a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} \end{array} \end{cases}\right\} = A_{\mu,\mu+\varrho}^{(\nu,\nu+\sigma)}. \tag{27}$$

Infolge der Bedingung (22) ist offenbar die Summe der $1^{\text{ten}}$, $3^{\text{ten}}$, $5^{\text{ten}}$, $\cdots$ *Zeile* dieses Schemas stets $\geqq 0$. Ebenso folgt mit Hinzunahme der Bedingung (23), daß die Summe der $(1^{\text{ten}} + 2^{\text{ten}})$, der $(3^{\text{ten}} + 4^{\text{ten}})$, $\cdots$ *Zeile* $\geqq 0$ sein muß. Hieraus erkennt man schließlich, daß:

$$A_{\mu,\mu+\varrho}^{(\nu,\nu+\sigma)} \geqq 0. \tag{28}$$

Da aber:

$$A_{\mu,\mu+\varrho}^{(\nu,\nu+\sigma)} = a_\mu^{(\nu)} - a_{\mu+1}^{(\nu)} + \cdots + (-1)^\varrho \cdot a_{\mu+\varrho}^{(\nu)} - A_{\mu,\mu+\varrho}^{(\nu+1,\nu+\sigma)}, \tag{29}$$

so folgt mit Benützung von Ungl. (28):

$$A_{\mu,\mu+\varrho}^{(\nu,\nu+\sigma)} \leqq a_\mu^{(\nu)} - a_{\mu+1}^{(\nu)} + \cdots + (-1)^\varrho \cdot a_{\mu+\varrho}^{(\nu)}, \tag{30}$$

und hieraus weiter:

$$A_{\mu,\mu+\varrho}^{(\nu,\nu+\sigma)} \leqq a_\mu^{(\nu)}. \tag{31}$$

Bezeichnet man jetzt wieder mit $S_\mu^{(\nu)}$ die Summe aller derjenigen Glieder, welche den ersten $(\mu + 1)$ Zeilen und $(\nu + 1)$ Kolonnen des Schemas (26) angehören, so hat man offenbar:

$$S_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - S_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\nu+1} A_{0,\mu+\varrho}^{(\nu+1,\nu+\sigma)} + (-1)^{\mu+1} A_{\mu+1,\mu+\varrho}^{(0,\nu)}, \tag{32}$$

also mit Benützung von Ungl. (28):

$$\left| S_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - S_\mu^{(\nu)} \right| \leqq A_{0,\mu+\varrho}^{(\nu+1,\nu+\sigma)} + A_{\mu+1,\mu+\varrho}^{(0,\nu)}, \tag{33}$$

und daher schließlich nach Ungl. (31):

$$\left| S_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - S_\mu^{(\nu)} \right| \leqq a_0^{(\nu+1)} + a_{\mu+1}^{(0)}. \tag{34}$$

Aus dieser Ungleichung folgt dann aber in der Tat die *Konvergenz* der fraglichen Doppelreihe, da die rechte Seite infolge der Bedingung (24) lediglich durch Wahl von $\mu$ und $\nu$ (unabhängig von $\varrho$ und $\sigma$) *beliebig klein* gemacht werden kann. Dabei wird die betreffende Doppelreihe nur *bedingt* konvergieren, wenn die $a_\mu^{(\nu)}$ so gewählt werden, daß die Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ *divergiert.*[1])

Im übrigen erkennt man, daß auf Grund der Bedingungen (22) und (25) auch jede *Zeile* bzw. *Kolonne* eine *konvergente* Reihe bildet (als alternierende Reihe mit *monotonen*, gegen *Null* konvergierenden Gliedern). Mit Hinzunahme der Bedingung (23) ergibt sich sodann in gleicher Weise

---

1) Dies muß z. B. stets der Fall sein, wenn die Hauptdiagonale des Schemas (26), also $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu^{(\nu)}$, eine *divergente* Reihe bildet $\left(\text{Beispiel: } a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu+\nu+1}\right)$.

die *Konvergenz* der *Zeilen-* bzw. *Kolonnensummen* (die übrigens auch aus § 62, Nr. 5, S. 456, Satz II folgen würde). Es besteht somit auch die Beziehung:

$$(35)\qquad \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}(-1)^{\mu+\nu}\cdot a_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\nu(-1)^\nu\cdot\sum_0^\infty{}_\mu(-1)^\mu\cdot a_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\mu(-1)^\mu\cdot\sum_0^\infty{}_\nu(-1)^\nu\cdot a_\mu^{(\nu)}.$$

Dagegen braucht die *Reihe der Diagonalen* in diesem Falle *nicht* zu konvergieren: ihre *Konvergenz* hängt von der weiteren Beschaffenheit der $a_\mu^{(\nu)}$ ab. So entsteht z. B. bei der in der Fußnote angeführten Annahme: $a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu+\nu+1}$ die *konvergente Doppelreihe*:

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{llll}
1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\cdots+(-1)^\mu\cdot\frac{1}{\mu+1}+\cdots \\
-\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\cdots+(-1)^{\mu+1}\cdot\frac{1}{\mu+2}+\cdots \\
+\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\cdots+(-1)^{\mu+2}\cdot\frac{1}{\mu+3}+\cdots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
+(-1)^\nu\cdot\frac{1}{\nu+1} & -(-1)^\nu\cdot\frac{1}{\nu+2} & +(-1)^\nu\cdot\frac{1}{\nu+3} & +\cdots+(-1)^{\mu+\nu}\cdot\frac{1}{\mu+\nu+1}+\cdots \\
+\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot,
\end{array}\right.$$

für welche die *Reihe der Diagonalen* offenbar lautet:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots$$

und somit *oszilliert*. Man kann hieraus mit Sicherheit schließen, daß die Reihe der Diagonalen *a fortiori oszillieren* muß, wenn die $a_\mu^{(\nu)}$ *noch oberhalb* $\frac{1}{\mu+\nu+1}$ liegen, und daß sie nur *konvergieren kann*, wenn sie *hinlänglich kleiner* sind (z. B. *so*, daß die Absolutwerte der Diagonalsummen schließlich monoton gegen Null konvergieren).

Die Doppelreihe (36) besitzt übrigens die Summe $\frac{1}{2}$, wie am einfachsten erkannt wird, wenn man zunächst setzt: $a_\mu^{(\nu)} = \frac{x^{\mu+\nu+1}}{\mu+\nu+1}$, wo $|x|<1$, darauf nach Diagonalen summiert und zur Grenze $x = 1$ übergeht: die Legitimität eines solchen Grenzüberganges kann freilich erst an späterer Stelle (in der Lehre von den sogenannten Potenzreihen) erwiesen werden. Etwas umständlicher gestaltet sich die (infolge der erwiesenen *Konver-*

*genz* der *Doppelreihe* für deren Summation ausreichende) direkte Berechnung von $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu^{(\nu)}$, die indessen mit ausschließlicher Benützung der bisher gewonnenen Hilfsmittel vollständig ausführbar ist (nämlich mit Hilfe der Beziehung $0 < \sum\limits_{n+1}^{n+\varrho}{}_\nu \frac{1}{\nu} - \lg\frac{n+\varrho+1}{n+1} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\varrho}$: s. § 34, S. 207, Ungl. (5), (6)).

## § 65. Über eine besondere Anordnung konvergenter Doppelreihen mit konvergenten Zeilen und Kolonnen.

1. Ist die Doppelreihe $\sum\limits_0^\infty{}_{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)} = S$ absolut konvergent (in welchem Falle dann nach § 64, Nr. 2 (S. 470) auch alle Zeilen und Kolonnen, sowie die Reihen der Zeilen- bzw. Kolonnensummen konvergieren), so steht es zufolge des Satzes von § 64, Nr. 4 (S. 472) frei, die Summation in jeder beliebigen Anordnung auszuführen, insbesondere also in der Weise, wie es in dem folgenden Schema angedeutet ist:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l}
\multicolumn{7}{l}{u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + u_3^{(0)} + \cdots + u_\nu^{(0)} + \cdots\cdots} \\
+ & \multicolumn{6}{l}{} \\
u_0^{(1)} & \multicolumn{6}{l}{u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + u_3^{(1)} + \cdots + u_\nu^{(1)} + \cdots\cdots} \\
+ & + & \multicolumn{5}{l}{} \\
u_0^{(2)} & u_1^{(2)} & \multicolumn{5}{l}{u_2^{(2)} + u_3^{(2)} + \cdots + u_\nu^{(2)} + \cdots\cdots} \\
+ & + & + & \multicolumn{4}{l}{} \\
u_0^{(3)} & u_1^{(3)} & u_2^{(3)} & \multicolumn{4}{l}{u_3^{(3)} + \cdots + u_\nu^{(3)} + \cdots\cdots} \\
+ & + & + & + & \multicolumn{3}{l}{} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \multicolumn{3}{l}{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot} \\
+ & + & + & + & \cdot & \multicolumn{2}{l}{} \\
u_0^{(\nu)} & u_1^{(\nu)} & u_2^{(\nu)} & u_3^{(\nu)} & \cdot & \multicolumn{2}{l}{u_\nu^{(\nu)} + \cdots\cdots} \\
+ & + & + & + & \cdot & + & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array} \tag{1}$$

d. h. so, daß man zuerst die erste Zeile und die erste Kolonne summiert, dann — mit Weglassung der bereits verbrauchten Glieder; also mit dem Diagonalgliede $u_1^{(1)}$ beginnend die zweite Zeile und zweite Kolonne, darauf mit $u_2^{(2)}$ beginnend die dritte Zeile und dritte Kolonne usf. Wenn man dann noch die an entsprechender Stelle stehenden Glieder der $1^{\text{ten}}$, $2^{\text{ten}}$, $\cdots$, $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Kolonne und Zeile paarweise zusammenfaßt (also

$u_0^{(\mu)}$ mit $u_\mu^{(0)}$, $u_1^{(\mu)}$ mit $u_\mu^{(1)}$, $\cdots$, $u_\nu^{(\mu)}$ mit $u_\mu^{(\nu)}$, $\cdots$ für: $\mu > \nu$), so nimmt die in (1) schematisch angedeutete Anordnung die folgende Gestalt an:

$$
(2)\qquad
\begin{array}{l}
u_0^{(0)} + \left(u_0^{(1)} + u_1^{(0)}\right) + \cdots + \left(u_0^{(\mu)} + u_\mu^{(0)}\right) + \cdots\cdot \\
+ u_1^{(1)} + \left(u_1^{(2)} + u_2^{(1)}\right) + \cdots + \left(u_1^{(\mu+1)} + u_{\mu+1}^{(1)}\right) + \cdots\cdot \\
+ \cdot \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
+ u_\nu^{(\nu)} + \left(u_\nu^{(\nu+1)} + u_{\nu+1}^{(\nu)}\right) + \cdots + \left(u_\nu^{(\mu+\nu)} + u_{\mu+\nu}^{(\nu)}\right) + \cdots\cdot \\
+ \cdot \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; ,
\end{array}
$$

sodaß sich durch Summation nach Kolonnen zunächst ergibt:

$$
(3)\quad S = \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu^{(\nu)} + \sum_0^\infty{}_\nu \left(u_\nu^{(\nu+1)} + u_{\nu+1}^{(\nu)}\right) + \cdots + \sum_0^\infty{}_\nu \left(u_\nu^{(\mu+\nu)} + u_{\mu+\nu}^{(\nu)}\right) + \cdots\cdot
$$

und schließlich:

$$
(4)\qquad S = \sum_0^\infty{}_\nu \left\{ u_\nu^{(\nu)} + \sum_1^\infty{}_\mu \left(u_\nu^{(\mu+\nu)} + u_{\mu+\nu}^{(\nu)}\right) \right\}.
$$

2. Es läßt sich zeigen, daß die vorstehende unter der Voraussetzung der absoluten Konvergenz hergeleitete Summationsanordnung für *jede* (wenn auch nur bedingt[1]) *konvergente* Doppelreihe mit *konvergenten Zeilen* und *Kolonnen* zulässig ist.

Vereinigt man die Summe der ersten $(n+1)$ Zeilen und der ersten $(n+1)$ Kolonnen der Doppelreihe, bildet also:

$$
(5)\qquad \sum_0^n{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} + \sum_0^n{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)},
$$

so sind hierin diejenigen Glieder *zweimal* enthalten, welche sowohl den ersten $(n+1)$ Zeilen, als auch den ersten $(n+1)$ Kolonnen angehören, also diejenigen, deren Summe nach der von uns benützten Schreibweise (s. § 62, S. 450, Gl. (3)) mit $S_n^{(n)}$ zu bezeichnen ist. Werden diese Glieder durch Subtraktion von $S_n^{(n)}$ aus dem Komplex (5) *ein*mal entfernt, so bleiben gerade diejenigen Glieder in einfacher Anzahl zurück, welche den ersten $(n+1)$ Winkelstreifen des Schemas (1) angehören, also diejenigen, welche in (2) bzw. (4) zum Vorschein kommen, wenn man den Index $\nu$ auf die Werte $0, 1, \cdots, n$ beschränkt. Man findet also:

$$
\sum_0^n{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} + \sum_0^n{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} - S_n^{(n)} = \sum_0^n{}_\nu \left\{ u_\nu^{(\nu)} + \sum_1^\infty{}_\mu \left(u_\nu^{(\mu+\nu)} + u_{\mu+\nu}^{(\nu)}\right) \right\}.
$$

1) Wie z. B. die Reihe 36) des vorigen Paragraphen.

Bildet man den Grenzwert für $n \to \infty$ und beachtet, daß dann jeder der drei links stehenden Ausdrücke in $S$ übergeht, so folgt:

$$S = \sum_0^\infty{}^{\nu} \left\{ u_\nu^{(\nu)} + \sum_1^\infty{}^{\mu} \left( u_\nu^{(\mu+\nu)} + u_{\mu+\nu}^{(\nu)} \right) \right\},$$

d. h. die Beziehung (4) behält in der Tat ihre Gültigkeit.

3. Als Beispiel für die Anwendung der Summationsformel (4) wollen wir die unter der Voraussetzung $|\alpha| < 1$ absolut konvergente Doppelreihe betrachten:

$$S = \sum_1^\infty{}^{\mu,\nu} \alpha^{\mu\nu}, \tag{6}$$

ausführlicher geschrieben:

$$\begin{aligned} S = \quad & \alpha^1 \;\; + \alpha^2 \;\; + \alpha^3 \;\; + \cdots + \alpha^\mu \;\; + \cdots\cdots \\ & + \alpha^{2\cdot 1} + \alpha^{2\cdot 2} + \alpha^{2\cdot 3} + \cdots + \alpha^{2\cdot\mu} + \cdots\cdots \\ & + \cdot \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \\ & + \alpha^{\nu\cdot 1} + \alpha^{\nu\cdot 2} + \alpha^{\nu\cdot 3} + \cdots + \alpha^{\nu\cdot\mu} + \cdots\cdots \\ & + \cdot \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \end{aligned}$$

also, wenn man nach Zeilen summiert:

$$S = \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \cdots + \frac{\alpha^\nu}{1-\alpha^\nu} + \cdots = \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{\alpha^\nu}{1-\alpha^\nu}, \tag{7}$$

die sogenannte Lambertsche Reihe, deren absolute Konvergenz für $|\alpha| < 1$, abgesehen von ihrer Herleitung aus der absolut konvergenten Doppelreihe (6), auch ohne weiteres aus dem Umstande erkannt wird, daß ihre Glieder von den entsprechenden der für $|\alpha| < 1$ absolut konvergierenden geometrischen Reihe $\sum \alpha^\nu$ sich nur um den für $\nu \to \infty$ gegen 1 konvergierenden Faktor $\frac{1}{1-\alpha^\nu}$ unterscheiden.

Die Anwendung der Formel (4) auf die Doppelreihe (6) (also für: $u_\mu^{(\nu)} = \alpha^{\mu\nu}$, $\mu, \nu \geqq 1$) gibt sodann:

$$\begin{aligned} S &= \sum_1^\infty{}^{\nu} \left\{ \alpha^{\nu^2} + \sum_1^\infty{}^{\mu} \left( \alpha^{\nu(\mu+\nu)} + \alpha^{(\mu+\nu)\nu} \right) \right\} \\ &= \sum_1^\infty{}^{\nu} \alpha^{\nu^2} \left( 1 + 2 \sum_1^\infty{}^{\mu} \alpha^{\nu\mu} \right) = \sum_1^\infty{}^{\nu} \alpha^{\nu^2} \left( 1 + \frac{2\alpha^\nu}{1-\alpha^\nu} \right), \end{aligned} \tag{8}$$

also schließlich mit Benützung von Gl. (7):

$$(9)\qquad \sum_1^\infty{}_\nu \frac{\alpha^\nu}{1-\alpha^\nu} = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1+\alpha^\nu}{1-\alpha^\nu}\cdot\alpha^{\nu^2},$$

eine Transformationsformel, durch welche die Lambertsche Reihe in eine sichtlich sehr viel rascher konvergierende übergeführt wird.

## § 66. Anwendung der Lehre von den Doppelreihen auf die Multiplikation einfach-unendlicher Reihen.

1. Sind $\sum u_\mu$, $\sum v_\nu$ zwei beliebige konvergente Reihen und hat man:

$$(1)\qquad \sum_0^\infty{}_\mu u_\mu = U, \quad \sum_0^\infty{}_\nu v_\nu = V,$$

so ist die *Doppelreihe:*

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \quad u_0v_0 + u_1v_0 + \cdots + u_\mu v_0 + \cdots \\ + u_0v_1 + u_1v_1 + \cdots + u_\mu v_1 + \cdots \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + u_0v_\nu + u_1v_\nu + \cdots + u_\mu v_\nu + \cdots \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right.$$

stets *konvergent* und besitzt die Summe $U\cdot V$, sodaß also:

$$(3)\qquad \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} u_\mu v_\nu = U\cdot V.$$

Denn, setzt man:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_\mu = U_\mu$$
$$v_0 + v_1 + \cdots + v_\nu = V_\nu$$

und bezeichnet, analog wie in den bisherigen Betrachtungen, mit $S_\mu^{(\nu)}$ den mit dem Gliede $u_\mu v_\nu$ endigenden „rechteckigen" Ausschnitt der Doppelreihe (2), so ergibt sich:

$$S_\mu^{(\nu)} = U_\mu\cdot V_\nu$$

und daher:

$$\lim_{\mu,\nu\to\infty} S_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu\to\infty} U_\mu\cdot\lim_{\nu\to\infty} V_\nu = U\cdot V,$$

womit die Richtigkeit der Behauptung (3) erwiesen ist.

Da ferner, wie unmittelbar ersichtlich, auch die *Zeilen* und *Kolonnen* der Doppelreihe (2) *konvergieren*, so folgt aus § 62, Nr. 5, Satz (II) (S. 456),

daß auch die *iterierten* Reihen gegen den Wert $U \cdot V$ konvergieren, sodaß also:

$$(4) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu \sum_0^\infty{}^\mu u_\mu v_\nu = \sum_0^\infty{}^\mu \sum_0^\infty{}^\nu u_\mu v_\nu = U \cdot V.$$

Berücksichtigt man schließlich noch den Satz von § 63, Nr. 3 (S. 462) über die Beziehung einer konvergenten *Doppelreihe* mit konvergenten Zeilen und Kolonnen zu der *einfachen*, aus den *„Diagonalen"* gebildeten Reihe, so läßt sich das Gesamtergebnis der vorstehenden Betrachtung folgendermaßen zusammenfassen:

*Für das Produkt zweier konvergenter Reihen* $\sum_0^\infty{}^\nu u_\nu = U$ *und* $\sum_0^\infty{}^\nu v_\nu = V$ *gilt außer den Beziehungen:*

$$U \cdot V = \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} u_\mu v_\nu = \sum_0^\infty{}^\nu \sum_0^\infty{}^\mu u_\mu v_\nu = \sum_0^\infty{}^\mu \sum_0^\infty{}^\nu u_\mu v_\nu$$

*auch die folgende:*

$$(5) \qquad U \cdot V = \sum_0^\infty{}^\nu w_\nu, \quad wo: \; w_\nu = u_0 v_\nu + u_1 v_{\nu-1} + \cdots + u_{\nu-1} v_1 + u_\nu v_0,$$

*falls diese letztere Reihe* k o n v e r g i e r t.

Im übrigen sei noch daran erinnert, daß das Produkt $U \cdot V$ (auch wenn die Konvergenz von $\sum w_\nu$ nicht besteht oder nicht nachweisbar ist) wie die Summe *jeder konvergenten* Doppelreihe nach § 62, Nr. 2 (S. 452) durch eine *einfache* Reihe dargestellt werden kann, nämlich diejenige, welche der Grenzwertbildung $\lim_{\nu \to \infty} S_\nu^{(\nu)}$ entspricht. Man hat somit in *jedem* Falle auch:

$$(6) \quad U \cdot V = \sum_0^\infty{}^\nu w_\nu', \quad \text{wo: } w_\nu' = (u_0 + \cdots + u_{\nu-1}) v_\nu + u_\nu v_\nu + (v_0 + \cdots + v_{\nu-1}) u_\nu,$$
$$(\text{speziell: } w_0' = u_0 v_0).$$

Die *Konvergenz* der Reihe $\sum w_\nu$ und somit die Gültigkeit der Formel (5) erscheint ohne weiteres gesichert, wenn jede der beiden Reihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ *absolut* konvergiert. Denn unter dieser Voraussetzung ist offenbar die *Doppel*reihe (2) *absolut* konvergent, und daraus resultiert nach dem Satze von § 64, Nr. 3 (S. 471) unmittelbar die *absolute* Kon-

vergenz[1]) der *Diagonalen*reihe $\sum w_\nu$ (einschließlich ihrer Gleichwertigkeit mit der Summe der *Doppel*reihe[2]), also mit $U \cdot V$). Im übrigen handelt es sich hierbei lediglich um denjenigen Fall, welcher bereits in § 58, Nr. 5 (S. 411) ohne Benützung des Begriffes der Doppelreihe erledigt wurde.

2. Um das Gültigkeitsgebiet der Multiplikationsformel (5) auch auf solche Fälle auszudehnen, in denen die Reihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ nicht beide absolut konvergieren, beweisen wir zunächst den folgenden Hilfssatz:

*Sind $(a_\nu)$, $(b_\nu)$ positive Zahlenfolgen mit dem Grenzwert* **Null**, *so hat man:*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_0^n {}_\nu\, a_\nu b_{n-\nu} = 0, \tag{7}$$

*wenn eine der folgenden zwei (hinreichenden) Bedingungen erfüllt ist:*

1) *Eine der beiden Reihen $\sum a_\nu$, $\sum b_\nu$, z. B. die* erste *ist konvergent.*

2) *Es konvergiert die Reihe $\sum \bar{a}_\nu \bar{b}_\nu$, wo $\bar{a}_\nu$ bzw. $\bar{b}_\nu$ die größte der Zahlen $(a_\nu, a_{\nu+1}, \cdots)$ bzw. $(b_\nu, b_{\nu+1}, \cdots)$ bedeutet.*[3])

---

1) Dabei konvergiert nicht nur $\sum |w_\nu|$, d. h.

$$\sum |u_0 v_\nu + u_1 v_{\nu-1} + \cdots + u_\nu v_0|,$$

sondern auch:

$$\sum (|u_0 v_\nu| + |u_1 v_{\nu-1}| + \cdots + |u_\nu v_0|).$$

2) In Wahrheit wird also für die Herleitung der Beziehung $U \cdot V = \sum_0^\infty {}_\nu\, w_\nu$ das oben gefundene Ergebnis, wonach schon die *Konvergenz* von $\sum w_\nu$ die Gültigkeit jener Beziehung nach sich zieht, hier *gar nicht benützt*. Überhaupt besitzt jenes Ergebnis im wesentlichen ein rein theoretisches Interesse, insofern es, abgesehen von gewissen ganz speziellen Fällen, wegen der verwickelten Beschaffenheit der Reihenglieder $w_\nu$ fast niemals möglich ist, die *Konvergenz* der Reihe $\sum w_\nu$ *direkt* (d. h. auch ohne Anwendung *funktionentheoretischer* Hilfsmittel) festzustellen. So erfolgt auch die Ausdehnung der Formel (5) auf den Fall, daß nur *eine* der beiden Reihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ *absolut* konvergiert, oder auf gewisse Fälle, in denen *beide* nur *bedingt* konvergieren (s. Nr. 3, 4 des Textes), durch den direkten Nachweis der Beziehung $U \cdot V = \lim_{n \to \infty} \sum_0^n {}_\nu\, w_\nu$, wobei dann also die *Konvergenz* dieser Reihe als (selbstverständliche) *Folgerung* erscheint, *nicht* aber ihre etwa anderweitig erfolgte Feststellung als *Beweismittel* dient.

3) Da die $a_\nu$ bzw. $b_\nu$ schließlich gegen Null konvergieren, so gibt es unter den Zahlen $(a_\nu, a_{\nu+1}, \cdots)$ bzw. $(b_\nu, b_{\nu+1}, \cdots)$ immer höchstens eine *endliche* An-

**Beweis zu 1).** Bezeichnet man mit $m$ die größte in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl, sodaß also:

$$n = 2m \quad \text{oder} \quad n = 2m + 1,$$

so hat man zunächst:

$$\sum_0^n {}^\nu a_\nu b_{n-\nu} = \sum_0^m {}^\nu a_\nu b_{n-\nu} + \sum_{m+1}^n {}^\nu a_\nu b_{n-\nu}. \tag{8}$$

In der ersten der rechts stehenden Summen ist $n - \nu \geqq n - m \geqq m$, in der zweiten $n - \nu \geqq 0$. Infolgedessen ergibt sich:

$$\sum_0^n {}^\nu a_\nu b_{n-\nu} < \bar{b}_m \cdot \sum_0^m {}^\nu a_\nu + \bar{b}_0 \cdot \sum_{m+1}^n {}^\nu a_\nu < \bar{b}_m \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu + \bar{b}_0 \sum_{m+1}^\infty {}^\nu a_\nu \tag{9}$$

(wo $\bar{b}_0$ bzw. $\bar{b}_m$ die in der Bedingung 2) angegebene Bedeutung haben, d. h. $\bar{b}_0$ bezeichnet die größte der Zahlen $(b_0, b_1, \cdots)$, $\bar{b}_m$ die größte der Zahlen $(b_m, b_{m+1}, \cdots)$). Wegen $\lim_{\nu \to \infty} b_\nu = 0$ und der Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu$ läßt sich $m_0$ so fixieren, daß gleichzeitig:

$$\bar{b}_m < \varepsilon, \quad \sum_{m+1}^\infty {}^\nu a_\nu < \varepsilon \quad \text{für: } m \geqq m_0,$$

und man findet daher, wenn noch $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu = A$ gesetzt wird, aus Ungl. (9):

$$\sum_0^n {}^\nu a_\nu b_{n-\nu} < \varepsilon(A + \bar{b}_0) \quad \text{für: } n = \begin{Bmatrix} 2m \\ 2m+1 \end{Bmatrix} \geqq 2m_0,$$

also, da es freisteht, $\varepsilon$ unbegrenzt zu verkleinern, wie behauptet:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_0^n {}^\nu a_\nu b_{n-\nu} = 0. \text{ —}$$

**Beweis zu 2).** Anknüpfend an Gl. (8) hat man zunächst für $k < m$:

$$\sum_0^m {}^\nu a_\nu b_{n-\nu} = \sum_0^k {}^\nu a_\nu b_{n-\nu} + \sum_{k+1}^m {}^\nu a_\nu b_{n-\nu}. \tag{10}$$

In der letzten Summe hat man wie oben: $n - \nu \geqq n - m \geqq m$, also um

---

zahl, welche $a_\nu$ bzw. $b_\nu$ erreichen oder übersteigen. darunter also eine *größte* Zahl $\bar{a}_\nu$ bzw. $\bar{b}_\nu$. Gleichzeitig mit der Reihe $\sum \bar{a}_\nu o_\nu$ konvergiert offenbar stets auch die Reihe $\sum a_\nu b_\nu$. Konvergieren die $a_\nu$ bzw. $b_\nu$ *monoton* (d. h. also niemals zunehmend) gegen Null, so ist die Reihe $\sum \bar{a}_\nu \bar{b}_\nu$ keine andere als die Reihe $\sum a_\nu b_\nu$.

so mehr: $n - \nu \geqq \nu$ (das Gleichheitszeichen gilt übrigens nur für $\nu = m$, falls überdies $n = 2m$) und daher:

$$\sum_{k+1}^{m} {}^{\nu} a_\nu b_{n-\nu} < \sum_{k+1}^{m} {}^{\nu} \bar{a}_\nu \bar{b}_\nu < \sum_{k+1}^{\infty} {}^{\nu} \bar{a}_\nu \bar{b}_\nu . \tag{11}$$

Zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ läßt sich infolge der Voraussetzung 2) $k$ so fixieren, daß:

$$\sum_{k+1}^{\infty} \bar{a}_\nu \bar{b}_\nu < \varepsilon, \quad \text{also bei } k < m \text{ um so mehr: } \sum_{k+1}^{m} a_\nu b_{n-\nu} < \varepsilon \tag{12}$$

(letzteres ganz unabhängig von der Wahl des $m$ bzw. $n$). Ist jetzt $k$ fixiert, so ist $n-k$ der niedrigste Index von $b_{n-\nu}$ in der ersten Summe der rechten Seite von Gl. (10) und daher:

$$\sum_{0}^{k} {}^{\nu} a_\nu b_{n-\nu} < (k+1) \cdot \bar{a}_0 \cdot \bar{b}_{n-k} . \tag{13}$$

Wegen $\lim\limits_{\nu \to \infty} b_\nu = 0$, also auch $\lim\limits_{\nu \to \infty} \bar{b}_\nu = 0$, läßt sich für $n$ eine untere Schranke $n'$ so fixieren, daß:

$$(k+1) \cdot \bar{a}_0 \bar{b}_{n-k} < \varepsilon \quad \text{für: } n \geqq n', \tag{14}$$

sodaß sich aus Gl. (10) mit Benützung der Ungleichungen (12)—(14) ergibt:

$$\sum_{0}^{m} {}^{\nu} a_\nu b_{n-\nu} < 2\varepsilon, \quad \text{wenn gleichzeitig: } n \begin{cases} \geqq n' \\ > 2k, \end{cases}$$

und somit:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{0}^{m} {}^{\nu} a_\nu b_{n-\nu} = 0. \tag{15}$$

Das analoge Ergebnis findet man für die zweite Summe der rechten Seite von Gl. (8), wenn man beachtet, daß die Voraussetzung 2) in bezug auf $a_\nu$ und $b_\nu$ symmetrisch ist und daß die fragliche Summe durch Vertauschung von $\nu$ mit $n-\nu$ die Umformung gestattet:

$$\sum_{m+1}^{n} {}^{\nu} a_\nu b_{n-\nu} = \sum_{0}^{n-m-1} {}^{\nu} a_{n-\nu} b_\nu \quad (\text{wo: } n-m-1 = m-1 \text{ bzw. } = m). \tag{16}$$

Mithin ergibt sich schließlich, wie behauptet:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{0}^{n} {}^{\nu} a_\nu b_{n-\nu} = 0.$$

3. Der erste Teil des eben bewiesenen Hilfssatzes setzt uns in den Stand, die Gültigkeit der Multiplikationsformel (5) unter der Voraussetzung zu beweisen, daß nur eine der beiden Reihen, etwa $\sum u_\nu$, *absolut* konvergiert.

Setzt man:

$$\sum_0^n w_\nu = W_n, \tag{17}$$

so ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} W_n = \; & u_0 v_0 \quad + u_1 v_0 \quad + \cdots + u_{n-1} v_0 + u_n v_0 \\ & + u_0 v_1 \quad + u_1 v_1 \quad + \cdots + u_{n-1} v_1 \\ & + \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ & + u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-1} \\ & + u_0 v_n \\ = \; & u_0 V_n + u_1 V_{n-1} + \cdots + u_{n-1} V_1 + u_n V_0 = \sum_0^n u_\nu V_{n-\nu} \end{aligned} \tag{18}$$

und daher:

$$U_n V - W_n = \sum_0^n u_\nu (V - V_{n-\nu}), \tag{19}$$

$$| U_n V - W_n | \leqq \sum_0^n | u_\nu | \cdot | V - V_{n-\nu} |. \tag{20}$$

Da $\sum | u_\nu |$ nach Voraussetzung konvergiert und $\lim\limits_{\nu \to \infty} | V - V_\nu | = 0$ ist, so ergibt sich durch Anwendung von Teil 1) des vorigen Hilfssatzes (für: $a_\nu = | u_\nu |$, $b_\nu = | V - V_\nu |$):

$$\lim_{n \to \infty} | U_n V - W_n | = 0,$$

d. h. schließlich wieder:

$$UV = \lim_{n \to \infty} W_n = \sum_0^\infty w_\nu. \tag{5}$$

Durch Zusammenfassung dieses Resultats mit dem am Schlusse von Nr. 1 ausgesprochenen ergibt sich also:

*Die Multiplikationsformel* (5) *ist gültig, wenn mindestens eine der beiden Reihen* $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ *absolut konvergiert.*

4. Wenn die Reihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ beide nur *bedingt* konvergieren, so müssen naturgemäß noch spezielle Voraussetzungen hinzukommen, wenn die Reihe $\sum w_\nu$ *konvergieren* soll. Denn da bei einer bedingt konvergenten Reihe die absoluten Beträge der Glieder mit wachsendem Index *beliebig*

*langsam* gegen Null konvergieren können[1]), so liegt auf der Hand, daß die Glieder $w_\nu = u_0 v_\nu + u_1 v_{\nu-1} + \cdots + u_\nu v_0$ im allgemeinen sogar nicht einmal den Grenzwert *Null* besitzen werden.

Wir wollen hier nur diejenigen Fälle näher ins Auge fassen, in welchen mindestens eine der beiden Reihen zu einer *absolut* konvergenten wird, wenn man je zwei unmittelbar aufeinander folgende Glieder zu einem einzigen vereinigt (wie z. B. bei jeder konvergenten alternierenden Reihe) und beweisen zunächst den folgenden Satz:

*Wenn die Reihe* $\sum_0^\infty{}_\nu (u_{2\nu} + u_{2\nu+1})$ *absolut konvergiert, während* $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ *nur bedingt zu konvergieren brauchen, so ist für die Gültigkeit der Multiplikationsformel* (5) *notwendig und hinreichend, daß eins der folgenden zwei Bedingungspaare besteht:*

$$(21\text{a})\qquad \lim_{m\to\infty} \sum_0^m{}_\nu\, u_{2\nu} v_{2m-2\nu} = \lim_{m\to\infty} \sum_0^{m-1}{}_\nu\, u_{2\nu+1} v_{2m-2\nu-1} = 0,$$

*oder:*

$$(21\text{b})\qquad \lim_{m\to\infty} \sum_0^m{}_\nu\, u_{2\nu+1} v_{2m-2\nu} = \lim_{m\to\infty} \sum_0^m{}_\nu\, u_{2\nu} v_{2m-2\nu+1} = 0.$$ [2])

Beweis. Nach Gl. (19) hat man für $n = 2m$:

$$U_{2m} \cdot V - W_{2m} = \sum_0^{2m}{}_\nu\, u_\nu (V - V_{2m-\nu}),$$

also durch Trennung der Glieder mit geradem und ungeradem Index:

$$(22)\quad U_{2m} \cdot V - W_{2m} = \sum_0^{m-1}{}_\nu \{u_{2\nu}(V - V_{2m-2\nu}) + u_{2\nu+1}(V - V_{2m-2\nu-1})\} + u_{2m}(V - V_0),$$

und, wenn man in der ersten Gliedergruppe

---

1) Vgl. § 59, Nr. 3 (S. 415).

2) Anders ausgesprochen: Die für die Konvergenz von $\sum w_\nu$ *notwendige* Bedingung $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ ist schon erfüllt, wenn sie für gerades *oder* ungerades $n$ in *der* Weise besteht, daß jeder der beiden *Bestandteile* von $w_n$:

$$w_n' = u_0 v_n \quad + u_2 v_{n-2} + u_4 v_{n-4} + \cdots$$
$$w_n'' = u_1 v_{n-1} + u_3 v_{n-3} + u_5 v_{n-5} + \cdots$$

(so weit fortzusetzen, bis die Summe von selbst abbricht) *einzeln* gegen Null konvergiert, und diese Bedingung ist dann zugleich auch für die Konvergenz von $\sum w_\nu$ *hinreichend.*

$$V_{2m-2\nu} = V_{2m-2\nu-1} + v_{2m-2\nu}$$

setzt:

$$(23) \qquad U_{2m} \cdot V - W_{2m} = \sum_{0}^{m-1} {}^{\nu} (u_{2\nu} + u_{2\nu+1})(V - V_{2m-2\nu-1}) + u_{2m} V - \sum_{0}^{m} {}^{\nu} u_{2\nu} v_{2m-2\nu},$$

anders geschrieben:

$$(24) \qquad W_{2m} = U_{2m-1} \cdot V - S_m + w'_{2m},$$

wo:

$$(25) \qquad S_m = \sum_{0}^{m-1} {}^{\nu} (u_{2\nu} + u_{2\nu+1})(V - V_{2m-(2\nu+1)}),$$

$$(26) \qquad w'_{2m} = \sum_{0}^{m} {}^{\nu} u_{2\nu} v_{2m-2\nu}.$$

Da $\sum |u_{2\nu} + u_{2\nu+1}|$ konvergiert und $\lim\limits_{\nu \to \infty} |V - V_{2\nu+1}| = 0$, so folgt aus dem ersten Teil des Hilfssatzes von Nr. 2, daß:

$$\lim_{m \to \infty} |S_m| \leqq \lim_{m \to \infty} \sum_{0}^{m-1} {}^{\nu} |u_{2\nu} + u_{2\nu+1}| \cdot |V - V_{2m-(2\nu+1)}| = 0,$$

und man findet daher aus Gl. (24):

$$(27) \qquad \overline{\lim_{m \to \infty}} W_{2m} = UV + \overline{\lim_{m \to \infty}} w'_{2m}$$

als diejenige Beziehung, welche über die Konvergenz oder Divergenz von $W_{2m}$ für $m \longrightarrow \infty$ Auskunft gibt. Insbesondere folgt daraus, daß *dann und nur dann*

$$\lim_{m \to \infty} W_{2m} = UV$$

wird, mit anderen Worten, daß die bei einem Gliede mit *geradem* Index abgebrochene Reihe $\sum w_\nu$ nach dem Werte $UV$ konvergiert, wenn:

$$(28) \qquad \lim_{m \to \infty} w'_{2m} = \lim_{m \to \infty} \sum_{0}^{m} {}^{\nu} u_{2\nu} v_{2m-2\nu} = 0$$

ist. Da andererseits:

$$W_{2m} = W_{2m-1} + w_{2m},$$

so ergibt sich weiter als *notwendige und hinreichende* Bedingung dafür, daß auch

$$\lim_{m \to \infty} W_{2m-1} = UV \quad \text{(also schließlich: } \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} w_\nu = UV)$$

wird, die Beziehung:

$$\lim_{m\to\infty} w_{2m} = 0,$$

welche mit Rücksicht auf die bereits bestehende Beziehung (28) auch durch die folgende ersetzt werden kann:

$$\lim_{n\to\infty} (w_{2m} - w'_{2m}) = 0,$$

d. h.

(29) $\lim\limits_{m\to\infty} w''_{2m} = 0,$ wenn gesetzt wird: $w''_{2m} = \sum\limits_{0}^{m-1}{}_{\nu}\, u_{2\nu+1} v_{2m-2\nu-1}.$

Damit ist zunächst die Behauptung, soweit sie sich auf die mit (21a) bezeichneten Gleichungen bezieht, bewiesen.

Um dieses Ergebnis auch auf die Gleichungen (21b) auszudehnen, hat man nur zu beachten, daß wegen der Konvergenz von $\sum |u_{2\nu} + u_{2\nu+1}|$ der erste Teil des Hilfssatzes von Nr. 2 ohne weiteres die Beziehungen liefert:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{0}^{m}{}_{\nu} (u_{2\nu} + u_{2\nu+1}) v_{2m-2\nu} = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{0}^{m}{}_{\nu} (u_{2\nu} + u_{2\nu+1}) v_{2m-2\nu+1} = 0,$$

welche, wenn nach Analogie von Gl. (26), (29) noch gesetzt wird[1]):

(30) $$w'_{2m+1} = \sum_{0}^{m}{}_{\nu} u_{2\nu} v_{2m+1-2\nu}, \quad w''_{2m+1} = \sum_{0}^{m}{}_{\nu} u_{2\nu+1} v_{2m-2\nu},$$

sich auch folgendermaßen schreiben lassen:

(31) $$\begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} (w'_{2m} + w''_{2m+1}) = 0, \\ \lim\limits_{m\to\infty} (w''_{2m+2} + w'_{2m+1}) = 0. \end{cases}$$

Daraus folgt aber, daß gleichzeitig mit den Beziehungen (28), (29) stets auch die folgenden (oben mit (21b) bezeichneten) bestehen:

(32) $$\lim_{m\to\infty} w'_{2m+1} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} w''_{2m+1} = 0$$

und umgekehrt. Die letzteren sind also unter der gemachten Voraus-

1) Vgl. die vorige Fußnote.

setzung gleichfalls *notwendig und hinreichend* für die Gültigkeit der Beziehung $UV = \sum\limits_0^\infty{}^\nu w_\nu$.

Zusatz. Setzt man $|u_\nu| = a_\nu$, $|v_\nu| = b_\nu$, so ergibt sich aus dem zweiten Teile des Hilfssatzes von Nr. 2, daß die Bedingungen (21a) bzw. (21b) sicher erfüllt sind, wenn die a. a. O. mit $\sum \bar{a}_\nu \bar{b}_\nu$ bezeichnete Reihe *konvergiert*. Die *Konvergenz* der letzteren bildet also zusammen mit derjenigen von $\sum |u_{2\nu} + u_{2\nu+1}|$ eine *hinreichende* Bedingung für die Gültigkeit der Multiplikationsformel (5).

5. Einfachere Formen von notwendigen und hinreichenden Konvergenzbedingungen ergeben sich, wenn man eine der beiden Reihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ noch weiteren Einschränkungen unterwirft. Insbesondere gilt der folgende Satz:

*Ist außer der Reihe $\sum\limits_0^\infty{}^\nu (u_{2\nu} + u_{2\nu+1})$ auch eine der folgenden:*

$$1)\ \sum_0^\infty{}^\nu (u_{2\nu+1} + u_{2\nu+2}), \qquad 2)\ \sum_0^\infty{}^\nu (v_{2\nu+1} + v_{2\nu+2}), \qquad 3)\ \sum_0^\infty{}^\nu (v_{2\nu} + v_{2\nu+1})$$

*absolut konvergent, so ist die für die Konvergenz der Reihe $\sum w_\nu$ (und die Gültigkeit der Multiplikationsformel) notwendige Bedingung:*

$$\lim_{n \to \infty} w_n = 0$$

*auch hinreichend, und zwar sogar schon, wenn ihre Existenz im Falle 1) nur für gerade oder nur für ungerade $n$, im Falle 2) für gerade $n$, im Falle 3) für ungerade $n$ vorausgesetzt wird.*

Beweis. Die *erste* der genannten Zusatzbedingungen läßt sich mit der ursprünglichen Voraussetzung der absoluten Konvergenz von $\sum\limits_0^\infty{}^\nu (u_{2\nu} + u_{2\nu+1})$ dahin vereinigen, daß die Reihe $\sum\limits_0^\infty{}^\nu |u_\nu + u_{\nu+1}|$ als konvergent vorausgesetzt wird. Und da andererseits $U = \sum\limits_0^\infty{}^\nu u_\nu$ in die Form gesetzt werden kann:

$$(33) \qquad U = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} \sum_0^\infty{}^\nu (u_\nu + u_{\nu+1}),$$

so konvergiert also $U$ in dieser letzteren Gestalt *absolut*. Setzt man also zur Abkürzung:

$$(34) \quad \frac{1}{2}(u_\nu + u_{\nu+1}) = \tilde{u}_{\nu+1} \ (\nu = 0, 1, 2, \cdots) \ \text{ und speziell: } \frac{1}{2} u_0 = \tilde{u}_0,$$

so ergibt sich nach Nr. 3 zunächst:

$$(35)\qquad UV=\sum_0^\infty{}^{\nu}\,\tilde{w}_\nu,\quad \text{wo:}\ \ \tilde{w}_\nu=\tilde{u}_0v_\nu+\tilde{u}_1v_{\nu-1}+\cdots+\tilde{u}_\nu v_0.$$

Man hat nun insbesondere:

$$(36\text{a})\qquad \tilde{w}_0=\tilde{u}_0v_0=\frac{1}{2}u_0v_0=\frac{1}{2}w_0$$

und für $\nu\geqq 1$:

$$\tilde{w}_\nu=\frac{1}{2}u_0v_\nu+\frac{1}{2}(u_0+u_1)v_{\nu-1}+\frac{1}{2}(u_1+u_2)v_{\nu-2}+\cdots+\frac{1}{2}(u_{\nu-1}+u_\nu)v_0$$

$$(36\text{b})\qquad =\frac{1}{2}(w_{\nu-1}+w_\nu)$$

und daher:

$$(37)\qquad \sum_0^n{}^{\nu}\,\tilde{w}_\nu=\frac{1}{2}w_0+\frac{1}{2}\sum_1^n{}^{\nu}(w_{\nu-1}+w_\nu)=\sum_0^n{}^{\nu}\,w_\nu-\frac{1}{2}w_n.$$

Infolgedessen ergibt sich:

$$(38)\qquad \sum_0^\infty{}^{\nu}\,w_\nu=\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_0^n{}^{\nu}\,\tilde{w}_\nu+\frac{1}{2}w_n\Big)=UV$$

mit Rücksicht auf Gl. (35) *dann und nur dann*, wenn:

$$(39)\qquad \lim_{n\to\infty}w_n=0.$$

Da im übrigen wegen der von vornherein bestehenden Konvergenz von $\sum\tilde{w}_\nu$ (s. Gl. (35)) stets:

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{w}_n=0,\quad \text{also nach (36b):}\ \lim_{n\to\infty}(w_{n-1}+w_n)=0,$$

so folgt, daß jede der Beziehungen:

$$(40)\qquad \lim_{m\to\infty}w_{2m}=0,\quad \lim_{m\to\infty}w_{2m+1}=0$$

die andere nach sich zieht und daß es daher, wie behauptet wurde, in der Tat genügt, *eine* dieser beiden Bedingungen als bestehend vorauszusetzen, um daraus die Existenz der Gleichung (39) und damit die Konvergenz der Reihe $\sum w_\nu$ zu folgern. —

Wir betrachten jetzt *zweitens* die Annahme, daß außer $\sum_0^\infty{}^{\nu}(u_{2\nu}+u_{2\nu+1})$ die Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu}(v_{2\nu+1}+v_{2\nu+2})$ *absolut* konvergiert. Nach dem Satze der vorigen Nummer (s. Gl. (28), (29)) ist die Konvergenz von $\sum w_\nu$ gesichert, falls die Beziehung besteht:

$$(41)\qquad \lim_{m\to\infty}w'_{2m}=\lim_{m\to\infty}w''_{2m}=0,$$

wo:

$$w'_{2m} = \sum_0^m {}^{\nu} u_{2\nu} v_{2m-2\nu}, \quad w''_{2m} = \sum_0^{m-1} {}^{\nu} u_{2\nu+1} v_{2m-2\nu-1}.$$

Man hat nun:

$$\begin{aligned} w'_{2m} - w''_{2m} &= \sum_0^{m-1} {}^{\nu} (u_{2\nu} v_{2m-2\nu} - u_{2\nu+1} v_{2m-2\nu-1}) + u_{2m} v_0 \\ &= \sum_0^{m-1} {}^{\nu} (u_{2\nu} + u_{2\nu+1}) v_{2m-2\nu} \\ &\quad - \sum_0^{m-1} {}^{\nu} u_{2\nu+1} (v_{2m-2\nu-1} + v_{2m-2\nu}) + u_{2m} v_0. \end{aligned}$$

Ersetzt man in der zweiten Summe $\nu$ durch $m-\nu-1$ und benützt für die linke Seite die Beziehung $w'_{2m} + w''_{2m} = w_{2m}$, so ergibt sich:

$$\left.\begin{matrix} w_{2m} - 2w''_{2m} \\ 2w'_{2m} - w_{2m} \end{matrix}\right\} = \sum_0^{m-1} {}^{\nu} (u_{2\nu} + u_{2\nu+1}) v_{2m-2\nu} - \sum_0^{m-1} {}^{\nu} (v_{2\nu+1} + v_{2\nu+2}) u_{2m-2\nu-1} + u_{2m} v_0. \tag{42}$$

Da die beiden Summen infolge der Konvergenz von $\sum |u_{2\nu} + u_{2\nu+1}|$, $\sum |v_{2\nu+1} + v_{2\nu+2}|$ nach dem ersten Teile des Hilfssatzes von Nr. 2 (wobei $b_\nu$ einmal durch $v_{2\nu+2}$, das andere Mal durch $u_{2\nu+1}$ zu ersetzen ist) für $m \to \infty$ gegen *Null* konvergieren, so findet man:

$$\lim_{m\to\infty} (w_{2m} - 2w''_{2m}) = \lim_{m\to\infty} (2w'_{2m} - w_{2m}) = 0 \tag{43}$$

und daraus folgt, daß die Beziehung:

$$\lim_{m\to\infty} w_{2m} = 0 \tag{44}$$

als (notwendig und) *hinreichend* für das gleichzeitige Verschwinden von $\lim\limits_{m\to\infty} w'_{2m}$ und $\lim\limits_{m\to\infty} w''_{2m}$, also nach Gl. (21a) bzw. (28), (29) für die *Konvergenz* von $\sum w_\nu$ erscheint.

Im Falle 3) findet man analog mit Gl. (42) die Beziehung:

$$\begin{aligned} \left.\begin{matrix} w_{2m+1} - 2w''_{2m+1} \\ 2w'_{2m+1} - w_{2m+1} \end{matrix}\right\} &= w'_{2m+1} - w''_{2m+1} \\ &= \sum_0^m {}^{\nu} (u_{2\nu} + u_{2\nu+1}) v_{2m+1-2\nu} \\ &= - \sum_0^m {}^{\nu} (v_{2\nu} + v_{2\nu+1}) u_{2m+1-2\nu}, \end{aligned} \tag{45}$$

und da wiederum nach dem ersten Teile des Hilfssatzes von Nr. 2 diese beiden Summen für $m \to \infty$ gegen *Null* konvergieren, so folgt:

(46) $$\lim_{m \to \infty} (w_{2m+1} - 2w''_{2m+1}) = \lim_{m \to \infty} (2w'_{2m+1} - w_{2m+1}) = 0,$$

also mit Berücksichtigung von Gl. (21b) bzw. (32) schließlich:

(47) $$\lim_{m \to \infty} w_{2m+1} = 0$$

als (notwendige und) *hinreichende* Bedingung für die Konvergenz von $\sum w_\nu$.

Damit ist der ausgesprochene Satz vollständig bewiesen.

Zusatz. Eine *hinreichende* Bedingung wesentlich anderer Art gewinnt man unter der Voraussetzung, daß die Reihen $\sum |u_{2\nu} + u_{2\nu+1}|$ und $\sum |u_{2\nu+1} + u_{2\nu+2}|$, also auch $\sum |u_\nu + u_{\nu+1}|$ konvergieren (Fall 1) des vorigen Satzes), in folgender Weise. Man hat:

$$w_n = \sum_0^n {}^{\nu} u_\nu v_{n-\nu} = \sum_0^n {}^{\nu} (-1)^\nu u_\nu \cdot (-1)^\nu v_{n-\nu}.$$

Durch Anwendung der *Abelschen Transformation* (s. § 59, S. 416, Gl. (15)), nämlich:

$$\sum_0^n {}^{\nu} p_\nu q_{n-\nu} = \sum_0^{n-1} {}^{\nu} (p_\nu - p_{\nu+1})(q_n + q_{n-1} + \cdots + q_{n-\nu}) + p_n(q_n + q_{n-1} + \cdots + q_0),$$

ergibt sich also:

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_0^{n-1} {}^{\nu} ((-1)^\nu u_\nu - (-1)^{\nu+1} u_{\nu+1})(v_n - v_{n-1} + \cdots + (-1)^\nu v_{n-\nu}) \\ &\qquad + (-1)^n \cdot u_n (v_n - v_{n-1} + \cdots + (-1)^n v_0) \\ &= \sum_0^{n-1} {}^{\nu} (u_\nu + u_{\nu+1})(v_{n-\nu} - v_{n+1-\nu} + \cdots + (-1)^\nu v_n) \\ &\qquad + u_n (v_0 - v_1 + \cdots + (-1)^n \cdot v_n). \end{aligned}$$

Wird auf die erste Summe eine analoge Schlußweise angewendet wie beim Beweise zu 1) des Hilfssatzes zu Nr. 2, wobei man

$$a_\nu \text{ durch } |u_\nu + u_{\nu+1}|, \quad b_{n-\nu} \text{ durch } |v_{n-\nu} - v_{n+1-\nu} + \cdots + (-1)^\nu \cdot v_n|,$$

also speziell: $b_n$ durch $|v_n|$ zu ersetzen hat, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Konvergenz von $\sum |u_\nu + u_{\nu+1}|$, wenn noch vorausgesetzt wird, daß auch die Reihe $\sum_0^\infty {}^{\nu} (-1)^\nu v_\nu$ *konvergiert* (mithin

$$|v_{n-\nu} - v_{n+1-\nu} + \cdots + (-1)^\nu v_n|$$

stets unter einer endlichen Schranke bleibt und für $\nu \leqq \frac{n}{2}$ und hinlänglich große $n$ beliebig klein wird):

$$\lim_{n \to \infty} w_n = 0,$$

und somit nach dem vorigen Satze die Konvergenz der Reihe $\sum w_\nu$. Man findet also:

*Konvergiert außer $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ auch die Reihe $\sum |u_\nu + u_{\nu+1}|$, so ist das Hinzukommen der Konvergenz von $\sum (-1)^\nu v_\nu$ (anders ausgesprochen: der Konvergenz von $\sum v_{2\nu}$ oder $\sum v_{2\nu+1}$) eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Multiplikationsformel.*

6. Die Voraussetzungen von Fall 1) des Hauptsatzes der vorigen Nummer sind offenbar erfüllt, wenn gesetzt wird:

$$u_\nu = (-1)^\nu a_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

wo $a_\nu \geqq a_{\nu+1} > 0$ und $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = 0$, wenn also $\sum u_\nu$ eine *alternierende* Reihe mit numerisch monoton gegen Null konvergierenden Gliedern. Ist alsdann $\sum v_\nu$ eine Reihe derselben Art, etwa:

$$v_\nu = (-1)^\nu b_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

so ergibt sich zunächst:

$$w_n = (-1)^n \cdot \sum_0^n {}_\nu \, a_\nu b_{n-\nu},$$

sodaß nach dem Satze der vorigen Nummer die Bedingung:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_0^n {}_\nu \, a_\nu b_{n-\nu} = 0 \tag{48}$$

als *notwendig und hinreichend* für die Gültigkeit der Multiplikationsformel (5) erscheint. Dieselbe läßt sich übrigens durch zwei Bedingungen einfacherer Art ersetzen. Man hat zunächst:

$$|w_n| = \sum_0^n {}_\nu \, a_\nu b_{n-\nu} \begin{cases} > b_n \cdot \sum\limits_0^n {}_\nu \, a_\nu \\ > a_n \cdot \sum\limits_0^n {}_\nu \, b_\nu . \end{cases} \tag{49}$$

Andererseits ist:

$$|w_{2n+1}| = \sum_0^{2n+1} {}_\nu \, a_\nu b_{2n+1-\nu} = \sum_0^n {}_\nu \, a_\nu b_{2n+1-\nu} + \sum_0^n {}_\nu \, a_{2n+1-\nu} b_\nu$$

$$< b_n \cdot \sum_0^n {}_\nu \, a_\nu + a_n \cdot \sum_0^n {}_\nu \, b_\nu, \tag{50}$$

und man findet daher, da nach Gl. (46) die Beziehung $\lim\limits_{n \to \infty} w_{2n+1} = 0$ für die Konvergenz von $\sum w_\nu$ schon hinreicht:

*Für die Anwendbarkeit der Multiplikationsformel* (5) *auf die beiden alternierenden Reihen* $\sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot a_\nu$, $\sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot b_\nu$ *mit numerisch monoton gegen Null konvergierenden Gliedern ist notwendig und hinreichend, daß:*

$$\lim_{n\to\infty} b_n \cdot \sum_0^n{}_\nu a_\nu = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \sum_0^n{}_\nu b_\nu = 0. \tag{51}$$

Da ferner:

$$\left.\begin{array}{l} b_n \cdot \sum_0^n{}_\nu a_\nu \\ a_n \cdot \sum_0^n{}_\nu b_\nu \end{array}\right\} > n \cdot a_n b_n, \tag{52}$$

und andererseits nach dem zweiten Teile des Hilfssatzes von Nr. 2 (S. 485) die *Konvergenz* der Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ stets die Beziehung (48) nach sich zieht, so ergibt sich weiter:

*Für die Anwendbarkeit der Multiplikationsformel auf die Reihen* $\sum(-1)^\nu \cdot a_\nu$, $\sum(-1)^\nu \cdot b_\nu$ *bildet die Beziehung:*

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n b_n = 0 \tag{53}$$

*eine notwendige, die Konvergenz der Reihe* $\sum a_\nu b_\nu$ *eine hinreichende Bedingung.*[1])

Hieraus folgt z. B., daß für die Reihen

$$\sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu^p}, \qquad \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu^q}$$

die Produktformel konvergiert oder divergiert, je nachdem $p + q > 1$ oder $p + q \leqq 1$, da im ersteren Falle die Reihe $\sum \frac{1}{\nu^{p+q}}$ konvergiert[2]), im letzteren $\lim_{n=\infty} n \cdot \frac{1}{n^{p+q}} = 1$ oder $= \infty$ wird.

---

1) Dies würde sich auch schon aus dem Zusatze zu Nr. 4 (S. 492) mit Berücksichtigung der Schlußbemerkung von Fußn. 1, S. 486, ergeben.

2) Speziell ergibt sich also (vgl. § 59, S. 414, Gl. (9)):

$$(\lg 2)^2 = \left(\sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu}\right)^2 = \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot c_\nu,$$

wo:

Übrigens läßt sich jede der obigen der Form nach gänzlich verschiedenen zwei Bedingungen auch so umgestalten, daß sie der Form der anderen möglichst nahe kommt (wobei allerdings, wie leicht zu sehen, jede der betreffenden Bedingungen etwas an Tragweite verliert).

*Erstens* ergibt sich, wenn man die als *notwendige* Bedingung erkannte Gleichung (53) in die $(1+\varrho)^{te}$ Potenz $(\varrho > 0)$ erhebt, daß auch die Beziehung:

$$\lim_{n\to\infty} n^{1+\varrho}(a_n b_n)^{1+\varrho} = 0$$

eine *notwendige* Bedingung liefert, und da diese letztere nach § 50, Nr. 1 (S. 336) immer die Konvergenz der Reihe $\sum (a_\nu b_\nu)^{1+\varrho}$ nach sich zieht, so kann man sagen, es bilde

die Konvergenz von $\sum a_\nu b_\nu$ eine *hinreichende*,
„ „ „ $\sum (a_\nu b_\nu)^{1+\varrho}$ (für jedes $\varrho > 0$) eine *notwendige* Bedingung

(sc. für die Gültigkeit der Multiplikationsformel). Da es hierbei freisteht, $\varrho > 0$ beliebig zu verkleinern, so zeigt diese Formulierung, daß die *Konvergenz* von $\sum a_\nu b_\nu$ sozusagen *„nahezu“* als *notwendige* Bedingung erscheint.

*Zweitens* ist ja die *hinreichende* Bedingung der *Konvergenz* von $\sum a_\nu b_\nu$ sicher erfüllt, wenn die $a_\nu b_\nu$ einem der bekannten Konvergenzkriterien erster Art genügen, nämlich (s. § 50, S. 336, Formel (C')):

$$(54)\quad \lim_{n\to\infty} n^{1+\varrho}\cdot a_n b_n < \infty \quad \text{bzw.}^{1)} \quad \lim_{n\to\infty} L_k(n)\cdot(\lg_k n)^{\varrho}\cdot a_n b_n < \infty \quad (\varrho > 0),$$

sodaß also diese Bedingungen gleichfalls als *hinreichende* zu gelten haben und die Vergleichung mit der als *notwendig* erkannten Be-

---

$$c_\nu = \sum_1^\nu {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{1}{\nu+1-\varkappa}$$
$$= \sum_1^\nu {}_\varkappa \frac{1}{\nu+1}\left(\frac{1}{\varkappa}+\frac{1}{\nu+1-\varkappa}\right)$$
$$= \frac{2}{\nu+1}\cdot\sum_1^\nu {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}.$$

1) Dabei ist:

$$L_k(n) = n\cdot\lg n\cdots\lg_k n.$$

dingung (53):

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n b_n = 0$$

zeigt, daß diese letztere gewissermaßen *nicht sehr weit* davon entfernt ist, eine *hinreichende* zu sein.

7. Die Vergleichung der *notwendigen* Bedingung (53) mit den *hinreichenden* von der Form (54) legt die Frage nahe, welche Rolle in dem vorliegenden Zusammenhange die Grenzwerte von der Form $\lim\limits_{n\to\infty} n \lg n \cdot a_n b_n$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} L_k(n) \cdot a_n b_n$ spielen. Wir wissen bereits, daß das *Verschwinden* dieser Grenzwerte (im Gegensatz zu demjenigen von $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n b_n$) *keine notwendige* Bedingung für die *Konvergenz* der Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ (mit *monotonen* Gliedern!) bildet, aber doch nur in dem Sinne, daß jene Grenzwerte auch bei *monotoner* Abnahme der Reihenglieder *nicht zu existieren brauchen* (s. § 53, Nr. 4, S. 369), daß aber, wenn jene Grenzwerte *nicht* existieren, jedenfalls das Verschwinden der entsprechenden *unteren* Limites für die *Konvergenz* durchaus unentbehrlich ist (s. § 47, S. 319, Fußn. 1). Dagegen hat die Beschaffenheit jener Grenzwerte bzw. *unteren* Limites auf die Konvergenz bzw. Divergenz der Produktreihe $\sum w_\nu$ in dem vorliegenden Falle *überhaupt keinen maßgebenden Einfluß*. Es gilt nämlich der folgende Satz[1]):

> *Bedeutet* $(M_\nu)$ *eine mit* $\nu$ *beliebig langsam ins Unendliche wachsende Zahlenfolge, so bildet die Beziehung:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} n M_n \cdot a_n b_n = 0 \quad \textit{oder auch nur:} \quad \varliminf_{n\to\infty} n M_n \cdot a_n b_n = 0$$
>
> *keine notwendige Bedingung für die Konvergenz der aus* $\sum(-1)^\nu \cdot a_\nu$, $\sum(-1)^\nu \cdot b_\nu$ *gebildeten Produktreihe* $\sum w_\nu$. *Vielmehr kann die letztere konvergieren, selbst wenn:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} n M_n \cdot a_n b_n = \infty$$
>
> *ist. Andererseits bildet eine Beziehung von der Form:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} L_k(n) \cdot a_n b_n = 0$$
>
> *noch keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz von* $\sum w_\nu$, *wie groß auch* $k$ *angenommen werden möge.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $(m_\nu)$, $(m_\nu')$ zwei mit $\nu$ monoton ins Unendliche wachsende Zahlenfolgen, deren nähere Charakterisierung wir

---

1) Man vergleiche damit den Satz (IV) des § 53 (S. 369)

uns noch vorbehalten und setzen:

$$a_\nu = \frac{1}{m_\nu \sqrt{\nu}}, \quad b_\nu = \frac{1}{m_\nu' \sqrt{\nu}} \quad (\nu \geqq 1,\ m_1 \geqq 1);$$

dann läßt sich zunächst zeigen, daß die Reihe $\sum w_\nu$ auf Grund der Bedingungen (51) sicher *konvergiert*. Man hat nämlich:

$$b_n \cdot \sum_1^n {}_\nu\, a_\nu = \frac{1}{m_n' \sqrt{n}} \sum_1^n {}_\nu \frac{1}{m_\nu \sqrt{\nu}} < \frac{1}{m_n' \sqrt{n}} \sum_1^n {}_\nu \frac{1}{\sqrt{\nu}}.$$

Da aber $\left(\text{s. § 51, S. 349, Gl. (32) für } \varrho = \frac{1}{2}\right)$:

$$\sum_1^n {}_\nu \frac{1}{\sqrt{\nu}} \cong 2\sqrt{n},$$

so folgt:

$$\lim_{n\to\infty} b_n \cdot \sum_1^n {}_\nu\, a_\nu = 0,$$

und ganz analog:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \sum_1^n {}_\nu\, b_\nu = 0,$$

sodaß die Bedingungen für die *Konvergenz* von $\sum w_\nu$ in der Tat erfüllt sind. Zugleich hat man:

$$n M_n \cdot a_n b_n = \frac{M_n}{m_n m_n'}.$$

Wählt man also $m_\nu, m_\nu'$ in der Weise, daß $m_n \cdot m_n' \sim M_n$ (z. B. $m_\nu = M_\nu^\varrho$, $m_\nu' = M_\nu^{1-\varrho}$, wo $0 < \varrho < 1$) oder $m_n \cdot m_n' \prec M_n$ (z. B. $m_\nu = M_\nu^\varrho$, $m_\nu' = \lg M_\nu$), so wird $\varliminf\limits_{n\to\infty} n M_n \cdot a_n b_n$ *von Null verschieden* bzw. sogar *unendlich groß*.

Damit ist also der erste Teil des ausgesprochenen Satzes erledigt.

Um auch die Richtigkeit des zweiten zu beweisen, setze man:

$$a_\nu = \frac{1}{L_k(\nu)}, \quad b_\nu = \frac{1}{\lg_{k+1} \nu}$$

(für $\nu \geqq m$, wo $m$ so zu wählen ist, daß $\lg_{k+1} m$ positiv ausfällt), sodaß also:

$$\lim_{n\to\infty} L_k(n) \cdot a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg_{k+1} n} = 0.$$

Andererseits hat man:

$$b_n \sum_m^n {}_\nu\, a_\nu = \frac{1}{\lg_{k+1} n} \sum_m^n {}_\nu \frac{1}{L_k(\nu)}.$$

Da aber (s. § 51, S. 348, Schluß von Nr. 4):

$$\sum_m^n{}^\nu \frac{1}{L_k(\nu)} \cong \lg_{k+1} n$$

und daher:

$$\lim_{n\to\infty} b_n \cdot \sum_m^n{}^\nu a_\nu = 1,$$

so folgt mit Rücksicht auf die Konvergenzbedingung (51), daß die Reihe $\sum w_\nu$ *divergiert.*

8. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu b_\nu$, d. h. $\sum |u_\nu v_\nu|$, welche auf Grund des Zusatzes zu Nr. 4 (S. 482) bei monoton[1]) gegen Null konvergierenden $|u_\nu|$, $|v_\nu|$ unter den in Nr. 4—6 behandelten Voraussetzungen eine *hinreichende* Bedingung für die Gültigkeit der Multiplikationsformel bildet und in dem besonderen Falle der *alternierenden* Reihen *„nahezu"* als *notwendig* erscheint (s. Nr. 6, S. 498), *im allgemeinen* den letzteren Charakter *keineswegs* besitzt. Dies leuchtet unmittelbar ein, wenn man beachtet, daß ja aus der Konvergenz jener Reihe nicht nur das Verschwinden von

$$\lim_{n\to\infty} |w_n| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_0^n{}^\nu u_\nu v_{n-\nu} \right|,$$

sondern sogar dasjenige von

$$\lim_{n\to\infty} \sum_0^n{}^\nu a_\nu b_{n-\nu} = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n{}^\nu |u_\nu v_{n-\nu}|$$

resultiert und daß (abgesehen von dem hier nicht in Betracht kommenden Falle aus gleichbezeichneten Gliedern bestehender, also absolut konvergenter Reihen) nur gerade im Falle der alternierenden Reihen

$$\left| \sum_0^n{}^\nu u_\nu v_{n-\nu} \right| = \sum_0^n{}^\nu |u_\nu v_{n-\nu}|$$

wird. Im übrigen läßt das folgende Beispiel erkennen, *wie weit* die fragliche hinreichende Bedingung davon entfernt ist, eine *notwendige* zu sein. Versteht man wieder unter $(a_\nu)$, $(b_\nu)$ positive, monoton gegen Null konvergierende Zahlenfolgen und setzt wie früher:

$$u_\nu = (-1)^\nu a_\nu, \quad \text{dagegen:} \quad v_{2\nu} = (-1)^\nu \cdot b_{2\nu}, \quad v_{2\nu+1} = (-1)^\nu \cdot b_{2\nu+1},$$

---

1) Sind die $|u_\nu| = a_\nu$, $|v_\nu| = b_\nu$ *nicht monoton*, so hätte man die Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ in dem vorliegenden Zusammenhange durch $\sum \bar{a}_\nu \bar{b}_\nu$ (s. den Zusatz zu Nr. 4, S. 492) zu ersetzen.

so hat man:

$$\sum_0^\infty v_\nu = \sum_0^\infty (-1)^\nu (b_{2\nu} + b_{2\nu+1}) = b_0 + b_1 - b_2 - b_3 + b_4 + b_5 - b_6 - b_7 + \cdots.$$

Da aber die Reihen $\sum_0^\infty (-1)^\nu \cdot b_{2\nu}$ und $\sum_0^\infty (-1)^\nu \cdot b_{2\nu+1}$ einzeln konvergieren, so gilt das gleiche auch von ihrer Differenz, also von der Reihe:

$$\sum_0^\infty (-1)^\nu \cdot (b_{2\nu} - b_{2\nu+1}) = \sum_0^\infty (v_{2\nu} - v_{2\nu+1}) = \sum_0^\infty (-1)^\nu \cdot v_\nu,$$

und da außerdem auch $\sum u_\nu$ die Eigenschaft besitzt, daß $\sum |u_{2\nu} + u_{2\nu+1}|$ und $\sum |u_{2\nu+1} + u_{2\nu+2}|$ konvergieren, so sind die Bedingungen des letzten Satzes von Nr. 5 (S. 496) sämtlich erfüllt, womit die Konvergenz der Reihe $\sum w_\nu$ gesichert ist. Andererseits steht es aber offenbar frei, die $a_\nu$, $b_\nu$ *beliebig langsam* gegen Null konvergieren zu lassen und so eine *beliebig starke Divergenz* der Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ zu erzeugen, ohne dadurch die *Konvergenz* der Reihe $\sum w_\nu$ zu beeinträchtigen.

## § 67. Konvergenz- und Divergenzkriterien für Doppelreihen mit nicht-negativen Gliedern.

1. Nach dem in § 64 gewonnenen Hauptresultat (s. a. a. O. Nr. 4 und 6, S. 472, 474) erfordert die Feststellung der *unbedingten* Konvergenz einer beliebigen Doppelreihe lediglich die Beurteilung der *Konvergenz* oder *Divergenz* einer ausschließlich aus Gliedern $a_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ bestehenden Doppelreihe. Als naturgemäßes Hilfsmittel zur Erreichung dieses Zwecks bietet sich, analog wie bei den einfachen Reihen, die Vergleichung der $a_\mu^{(\nu)}$ mit den entsprechenden Gliedern einer bereits als *konvergent* oder *divergent* erkannten Doppelreihe. Dabei ergeben sich in bezug auf die Ausführung dieser Operation *zwei* Möglichkeiten, je nachdem man darauf ausgeht, ganz direkt die *Konvergenz* oder *Divergenz* der *Doppelreihe als solcher* oder aber diejenige der aus ihr durch Anordnung der Glieder nach *Diagonalen* hervorgehenden *einfachen* Reihe zu erschließen (deren Konvergenz oder Divergenz ja mit derjenigen der *Doppel*reihe zusammenfällt — s. § 63, Nr. 1). Obschon die *zweite* dieser Möglichkeiten namentlich in bezug auf die Bildung von *Konvergenz*kriterien sich als die vorteilhaftere erweist, so wollen wir doch, gerade um dies deutlich zu machen, zunächst auch die *erste* kurz erörtern.

Bezeichnet man wieder mit $S_\mu^{(\nu)}$ die Summe desjenigen endlichen Ausschnittes der Doppelreihe, welcher begrenzt wird von der $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Kolonne und $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Zeile, so erkennt man zunächst, daß die $S_\mu^{(\nu)}$ infolge der Voraussetzung $a_\mu^{(\nu)} \geq 0$ eine *monotone* Doppelfolge bilden. Daraus folgt aber, daß eine Doppelreihe der betrachteten Art nur *konvergieren* oder *eigentlich divergieren* kann und daß insbesondere die *Konvergenz* gesichert ist, wenn nur festgestellt werden kann, daß die $S_\mu^{(\nu)}$ stets unter einer festen positiven Schranke bleiben. Das letztere ist aber offenbar der Fall, wenn eine Beziehung von der Form besteht:

$$(1) \qquad a_\mu^{(\nu)} \leqq G \cdot c_\mu^{(\nu)} \quad \text{für:} \quad \begin{cases} \mu \geqq m, & \nu = 0, 1, 2, \cdots \\ \nu \geqq n, & \mu = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

unter $c_\mu^{(\nu)}$ das allgemeine Glied einer bereits als konvergent erkannten Doppelreihe, unter $G$ irgendeine positive Zahl, unter $m, n$ zwei natürliche Zahlen verstanden. Denn bezeichnet man mit $s_\mu^{(\nu)}$ die Summe derjenigen Glieder $c_\mu^{(\nu)}$, welche den in der Summe $S_\mu^{(\nu)}$ enthaltenen entsprechen, und setzt $\lim\limits_{\mu, \nu \to \infty} s_\mu^{(\nu)} = s$, so folgt aus (1):

$$(2) \qquad S_\mu^{(\nu)} \leqq S_m^{(n)} + G\left(s_\mu^{(\nu)} - s_m^{(n)}\right) < S_m^{(n)} + G\left(s - s_m^{(n)}\right).$$

Hieraus geht aber auf Grund der oben gemachten Bemerkung hervor, daß aus dem Bestehen der Beziehung (1) allemal die *Konvergenz* der Doppelreihe resultiert.

Setzt man $c_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{C_\mu^{(\nu)}}$, so läßt sich die Bedingung (1) durch die folgende ersetzen:

$$(3) \qquad C_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G \quad \text{für:} \quad \begin{cases} \mu > m, & \nu = 0, 1, 2, \cdots \\ \nu > n, & \mu = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

und diese letztere kann man in die folgenden *drei* Teilbedingungen zerlegen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{(a)} \quad C_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G & \text{für:} \quad \mu > m, \quad \nu \leqq n, \\ \text{(b)} \quad C_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G & \quad\text{"} \qquad \mu \leqq m, \quad \nu > n, \\ \text{(c)} \quad C_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G & \quad\text{"} \qquad \mu > m, \quad \nu > n. \end{cases}$$

Da ferner die Ungleichung (3) und folglich auch die drei Ungleichungen (4) sicher erfüllt bleiben, wenn man die Zahlen $m, n$ sukzessive durch zwei immer *größer* werdende, etwa $m' > m$, $n' > n$ ersetzt, so ziehen dieselben stets die folgenden nach sich:

$$(5)\qquad \begin{cases} \text{(a)} & \overline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}\, C_\mu^{(\nu)}\cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty \quad \text{für: } \nu = 0, 1, 2, \cdots, \\ \text{(b)} & \overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, C_\mu^{(\nu)}\cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty \quad \text{für: } \mu = 0, 1, 2, \cdots, \\ \text{(c)} & \overline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}}\, C_\mu^{(\nu)}\cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty. \end{cases}$$

Diese letzteren erscheinen daher vorläufig nur als *notwendige* Bedingungen für das Bestehen der Ungleichungen (4) bzw. (3). Umgekehrt folgt nun aber zunächst aus Ungl. (5c), daß der betreffende Doppellimes eine bestimmte positive Zahl $g$ sein muß und daß daher (vgl. § 41, S. 261, Ungl. (7)), wenn $g' > g$ angenommen wird:

$$(6c)\qquad C_\mu^{(\nu)}\cdot a_\mu^{(\nu)} < g' \quad \text{etwa für: } \mu > m,\ \nu > n.$$

Ferner ergibt sich aus Ungl. (5a), (5b), daß gesetzt werden kann:

$$(6a)\qquad C_\mu^{(\nu)}\cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g^{(\nu)} \quad \text{für: } \mu > m,\ \nu = 0, 1, \cdots, n,$$

$$(6b)\qquad C_\mu^{(\nu)}\cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g_\mu \quad\ \text{„}\quad \nu > n,\ \mu = 0, 1, \cdots, m,$$

wo $g^{(\nu)}$, $g_\mu$ gewisse positive (mit $\nu$ bzw. $\mu$ im allgemeinen veränderliche) Zahlen bedeuten. Diese drei Ungleichungen gehen aber schließlich in die mit (4) bezeichneten über, wenn man — was offenbar freisteht — $g'$, $g^{(\nu)}$, $g_\mu$ durch eine einzige Zahl $G$ ersetzt, welche die *größte* der Zahlen $g'$, $g^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n)$, $g_\mu$ $(\mu = 0, 1, \cdots, m)$ vorstellt.

Hiernach erweisen sich die Bedingungen (5) auch als *hinreichend* für die *Konvergenz* der Doppelreihe $\sum\limits_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$. Dabei ziehen offenbar die Bedingungen (5a) bzw. (5b) nur die Konvergenz jeder einzelnen *Zeile* bzw. *Kolonne* nach sich, während dann unter der ausdrücklichen Voraussetzung, daß jede Zeile und jede Kolonne konvergiert, die Bedingung (5c) erst die Konvergenz der *Doppelreihe* zur Folge hat. Insbesondere ist also zu beachten, daß auch *keine einzige* der in (5a) bzw. (5b) enthaltenen unbegrenzten Folge von Bedingungen *entbehrlich* ist, da schon die *Divergenz* einer einzelnen *Zeile* oder *Kolonne* auch die *Divergenz* der *Doppelreihe* nach sich ziehen und daher die Wirkung aller übrigen Bedingungen illusorisch machen würde.

Dagegen kann unter einer bestimmten Voraussetzung die Bedingung (5c) entbehrt werden, wenn nämlich die Beziehungen (5a), (5b) in dem Sinne *gleichmäßig*[1]) erfüllt sind, daß an die Stelle der Ungleichun-

1) Bezüglich dieser Ausdrucksweise vgl. § 42, Nr. 3, S. 275.

gen (6a), (6b) die folgenden treten:

$$(7)\qquad \begin{cases} \text{(a)} \quad C_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G \quad \text{für: } \mu \geqq m, \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots, \\ \text{(b)} \quad C_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G \quad \text{für: } \nu \geqq n, \quad \mu = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

mit anderen Worten, wenn die in (6a) und (6b) mit $g^{(\nu)}$, $g_\mu$ bezeichneten Zahlen auch für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ und $\mu = 0, 1, 2, \cdots$ *in infinitum* eine *bestimmte obere Grenze* $G$ haben (was ja ohne ausdrückliche Voraussetzung bzw. ohne das Hinzutreten der Bedingung (5c) nicht der Fall zu sein brauchte). In der Tat sind ja dann die Bedingungen mit den ursprünglichen Konvergenzbedingungen (3) vollkommen identisch.

2. Eine einfachere Fassung des Konvergenzkriteriums ergibt sich, wie bereits oben angekündigt wurde, wenn man die zu untersuchende Doppelreihe und dem entsprechend auch die Vergleichsdoppelreihe von vornherein nach Diagonalen geordnet als einfache Reihen, also in der Form:

$$\sum_0^\infty {}_\lambda \left(a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda-1)} + \cdots + a_\lambda^{(0)}\right) \quad \text{bzw.} \quad \sum_0^\infty {}_\lambda \left(c_0^{(\lambda)} + c_1^{(\lambda-1)} + \cdots + c_\lambda^{(0)}\right)$$

in Betracht zieht. Dabei tritt also irgendein bestimmtes Glied $a_\mu^{(\nu)}$ bzw. $c_\mu^{(\nu)}$ in derjenigen Gliedergruppe auf, welche durch den Index $\lambda = \mu + \nu$ bestimmt wird. Und es erscheint daher für die *Konvergenz* jener aus den $a_\mu^{(\nu)}$ gebildeten einfachen Reihe (also auch für diejenige der ursprünglichen Doppelreihe) *hinreichend*, wenn nur von einer bestimmten Gliedergruppe ab, etwa für $\mu + \nu \geqq l$:

$$(8)\qquad a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda-1)} + \cdots + a_\lambda^{(0)} \leqq G\left(c_0^{(\lambda)} + c_1^{(\lambda-1)} + \cdots + c_\lambda^{(0)}\right),$$

und diese letztere Bedingung ist sicher erfüllt, wenn:

$$(9)\qquad a_\mu^{(\nu)} \leqq G \cdot c_\mu^{(\nu)} \quad \text{für: } \mu + \nu \geqq l,$$

anders geschrieben:

$$(10)\qquad C_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G \quad \text{für: } \mu + \nu \geqq l,$$

unter $G$ wiederum eine beliebige positive Zahl verstanden. Diese Bedingung läßt sich aber schließlich auch durch die folgende ersetzen:

$$(\text{I a})\qquad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}}\, C_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty,$$

sodaß also an die Stelle der früheren *drei* Bedingungsformen (5) jetzt *eine einzige* tritt. Dabei sei ausdrücklich bemerkt, daß der hier auf-

tretende *obere Limes* kein *oberer Doppellimes* (s. § 41, Nr. 2, S. 261), sondern der obere Limes der *einfach* unendlichen Zahlenfolge:

$$C_0^{(0)} a_0^{(0)},\ C_0^{(1)} a_0^{(1)},\ C_1^{(0)} a_1^{(0)},\ \cdots,\ C_0^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)},\ C_1^{(\lambda-1)} a_1^{(\lambda-1)},\ \cdots,\ C_\lambda^{(0)} a_\lambda^{(0)},\ \cdots\cdots$$

ist.

Die nämliche Schlußweise würde bei Vergleichung von $a_\mu^{(\nu)}$ mit dem allgemeinen Gliede einer bereits als *divergent* erkannten Doppelreihe $d_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{D_\mu^{(\nu)}}$ die Beziehung:

$$\underline{\lim}_{\mu+\nu\to\infty} D_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \tag{11}$$

als *hinreichende* Bedingung für die *Divergenz* der vorgelegten Doppelreihe ergeben. Unterwirft man indessen die zum Vergleiche herangezogene Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu} d_\mu^{(\nu)}$ der gewissermaßen selbstverständlichen Bedingung, daß ihre *Divergenz* nicht lediglich durch diejenige irgendeiner oder mehrerer *Zeilen* oder *Kolonnen* erzeugt werden soll, also durch deren Weglassung beseitigt werden könnte, daß vielmehr die Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu} d_\mu^{(\nu)}$ auch nach Weglassung jeder beliebigen endlichen Anzahl von Zeilen und Kolonnen stets *divergent* bleiben soll (während im Gegenteil keine einzige Zeile oder Kolonne zu divergieren braucht), so erscheint offenbar die *Divergenz* von $\sum_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$ gesichert, wenn nur von einer bestimmten Stelle ab, etwa für $\mu \geqq m,\ \nu \geqq n$, eine Beziehung von der Form besteht:

$$a_\mu^{(\nu)} \geqq g \cdot d_\mu^{(\nu)} \quad (\text{wo: } g > 0), \tag{12}$$

anders geschrieben:

$$D_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq g \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n, \tag{13}$$

oder auch schließlich:

$$\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} D_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} > 0, \tag{Ib}$$

eine Bedingung, die offenbar *weniger* verlangt, als die durch Ungl. (11) dargestellte.[1])

---

1) Die Ungleichung (11) enthält ja, wie aus der Bedeutung des Ausdrucks $\underline{\lim}_{\mu+\nu\to\infty} D_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)}$ leicht erkannt wird, noch die beiden folgenden Bedingungen in sich:

$$\underline{\lim}_{\mu\to\infty} D_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} D_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots).$$

3. Um die für die Kriterienbildung erforderlichen $C_\mu^{(\nu)}$, $D_\mu^{(\nu)}$ zu gewinnen, dürfte das folgende Verfahren sich als besonders einfach empfehlen. Es sei $c_\lambda > 0$ bzw. $d_\lambda > 0$ das allgemeine Glied einer *konvergenten* bzw. *divergenten* einfach unendlichen Reihe. Dann ist auch von den beiden Reihen:

$$(14) \qquad c_0 + \sum_1^\infty{}^\lambda \frac{\lambda+1}{\lambda} \cdot c_\lambda, \quad d_0 + \sum_1^\infty{}^\lambda \frac{\lambda+1}{\lambda} d_\lambda,$$

wegen $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda+1}{\lambda} = 1$, die erstere *konvergent*, die letztere *divergent*. Setzt man sodann:

$$(15) \qquad \begin{cases} c_0^{(0)} = c_0, & \text{im übrigen:} \quad c_\mu^{(\nu)} = \dfrac{1}{\mu+\nu} \cdot c_{\mu+\nu}, \\ d_0^{(0)} = d_0, & \quad ,, \qquad ,, \qquad d_\mu^{(\nu)} = \dfrac{1}{\mu+\nu} \cdot d_{\mu+\nu}, \end{cases}$$

so findet man:

$$c_0^{(\mu+\nu)} + \cdots + c_\mu^{(\nu)} + \cdots + c_{\mu+\nu}^{(0)} = \frac{\mu+\nu+1}{\mu+\nu} \cdot c_{\mu+\nu},$$
$$d_0^{(\mu+\nu)} + \cdots + d_\mu^{(\nu)} + \cdots + d_{\mu+\nu}^{(0)} = \frac{\mu+\nu+1}{\mu+\nu} \cdot d_{\mu+\nu}.$$

Da diese Summen die $(\mu+\nu)^{\text{ten}}$ Diagonalen der Doppelreihen $\sum\limits_{\mu,\nu} c_\mu^{(\nu)}$ bzw. $\sum d_\mu^{(\nu)}$ bilden, so folgt, wenn $\mu + \nu = \lambda$ gesetzt wird, durch Summation, daß:

$$\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} c_\mu^{(\nu)} = c_0 + \sum_1^\infty{}^\lambda \frac{\lambda+1}{\lambda} \cdot c_\lambda, \quad \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} d_\mu^{(\nu)} = d_0 + \sum_1^\infty{}^\lambda \frac{\lambda+1}{\lambda} \cdot d_\lambda,$$

daß also in der Tat die Doppelreihe der $c_\mu^{(\nu)}$ *konvergiert*, diejenige der $d_\mu^{(\nu)}$ *divergiert*. Zugleich erkennt man, daß aus der Doppelreihe der $d_\mu^{(\nu)}$ bei Weglassung von $n$ Zeilen und $n$ Kolonnen die folgende entsteht:

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{2n} d_{2n} & \frac{1}{2n+1} d_{2n+1} & \frac{1}{2n+2} d_{2n+2} & \cdots\cdots \\
\frac{1}{2n+1} d_{2n+1} & \frac{1}{2n+2} d_{2n+2} & \frac{1}{2n+3} d_{2n+3} & \cdots\cdots \\
\frac{1}{2n+2} d_{2n+2} & \frac{1}{2n+3} d_{2n+3} & \frac{1}{2n+4} d_{2n+4} & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots,
\end{array}$$

welche nach Diagonalen summiert das Resultat $\sum\limits_0^\infty{}^\lambda \frac{\lambda+1}{2n+\lambda} d_{2n+\lambda}$ liefert, ebenfalls also *divergiert*.

Setzt man dann wiederum: $c_\nu = \frac{1}{C_\nu}$, $d_\nu = \frac{1}{D_\nu}$, so ergeben sich durch Einsetzen der Ausdrücke (15) in die *allgemeinen* Konvergenz- und Divergenzkriterien (Ia) und (Ib) die folgenden *spezielleren*:

Die Doppelreihe $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ ist

(IIa) *konvergent*, wenn: $\overline{\lim\limits_{\mu+\nu\to\infty}}\,(\mu+\nu)\cdot C_{\mu+\nu}\cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty$,

(IIb) *divergent*, wenn: $\underline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}}\,(\mu+\nu)\cdot D_{\mu+\nu}\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0$.

Wählt man wie bei der Bildung der De Morgan-Bonnetschen Kriterienskala (§ 50, Nr. 1, S. 336) für die $C_\nu$, $D_\nu$ der Reihe nach die Ausdrücke:

$$C_\nu = \nu^{1+\varrho},\quad \nu\cdot(\lg\nu)^{1+\varrho},\quad \nu\cdot\lg\nu\cdot(\lg_2\nu)^{1+\varrho},\quad\cdots\quad(\varrho>0),$$
$$D_\nu = \nu,\quad \nu\cdot\lg\nu,\quad \nu\cdot\lg\nu\cdot\lg_2\nu,\quad\cdots,$$

so ergeben sich also als hinreichende Bedingungen für die *Konvergenz* von $\sum\limits_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$ die Beziehungen:

$$(16\text{a})\quad\left\{\begin{array}{ll}\overline{\lim\limits_{\mu+\nu\to\infty}}\,(\mu+\nu)^{2+\varrho}\cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty & (\varrho>0)\\ \overline{\lim\limits_{\mu+\nu\to\infty}}\,(\mu+\nu)^2\cdot(\lg(\mu+\nu))^{1+\varrho}\cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty & \\ \overline{\lim\limits_{\mu+\nu\to\infty}}\,(\mu+\nu)^2\cdot\lg(\mu+\nu)\cdot(\lg_2(\mu+\nu))^{1+\varrho}\cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, & \end{array}\right.$$

desgleichen für die *Divergenz*:

$$(16\text{b})\quad\left\{\begin{array}{l}\underline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}}\,(\mu+\nu)^2\;\; a_\mu^{(\nu)} > 0\\ \underline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}}\,(\mu+\nu)^2\cdot\lg(\mu+\nu)\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0\\ \underline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}}\,(\mu+\nu)^2\cdot\lg(\mu+\nu)\cdot\lg_2(\mu+\nu)\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right.$$

4. Einen anderen für die Bildung von *Konvergenz*bedingungen zweckmäßigen Typus von Vergleichsdoppelreihen gewinnt man durch die Bemerkung, daß das Quadrat jeder konvergenten einfachen Reihe nach den Regeln über die Multiplikation zweier konvergenter Reihen (s. § 66, Nr. 1, S. 484) auch durch eine konvergente Doppelreihe dargestellt werden kann, nämlich:

$$\Big(\sum_0^\infty{}^{\nu}\, c_\nu\Big)^2 = \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, c_\mu\cdot c_\nu.$$

Da also eine Doppelreihe von dieser Form stets konvergiert, so kann man setzen:

$$c_\mu^{(\nu)} = c_\mu \cdot c_\nu, \quad C_\mu^{(\nu)} = C_\mu \cdot C_\nu,$$

sodaß sich aus dem allgemeinen Konvergenzkriterium (Ia) wiederum das folgende speziellere ergibt:

$$\text{(III)} \qquad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}}\, C_\mu C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty: \quad \textit{Konvergenz.}$$

Die entsprechende Verwendung von *divergenten* Doppelreihen von der Form $\sum_{\mu,\nu} c_\mu \cdot d_\nu$ (oder gar $\sum_{\mu,\nu} d_\mu \cdot d_\nu$) erweist sich als gänzlich unzweckmäßig, da durch diejenigen Kriterien, die man auf diesem Wege gewinnen würde, überhaupt nur solche Doppelreihen getroffen werden könnten, bei welchen alle *Zeilen oder* (bzw. *und*) *Kolonnen*, zum mindesten von einer bestimmten ab, *divergieren*, während doch der für Doppelreihen als solche *charakteristische* Fall von *Divergenz* gar nicht auf der Divergenz irgendeiner Zeile oder Kolonne beruht, vielmehr bei gleichzeitiger *Konvergenz* aller Zeilen und Kolonnen zum Vorschein kommt. —

Wählt man in dem obigen *Konvergenz*kriterium (III) etwa:

$$C_\nu = (\nu+1)^{1+\varrho} \quad (\text{wo } \varrho > 0),$$

so ergibt sich als hinreichende Bedingung für die *Konvergenz* von $\sum_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$ die folgende:

$$(17) \qquad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}}\, ((\mu+1)(\nu+1))^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty \quad (\varrho > 0)$$

und daran anschließend nach Bedarf wiederum eine Skala sukzessive schärfer werdender Kriterien durch die Wahl $C_\nu = L_k(\nu+m)(\lg_k(\nu+m))^\varrho$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ (wobei die mit $m$ bezeichnete Zahl so anzunehmen ist, daß $\lg_k(m)$ positiv ausfällt).

Dabei kann man dem Kriterium (17) noch die etwas einfachere Form geben:

$$(18) \qquad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}}\, (\mu\nu)^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty \quad (\mu > 0,\ \nu > 0),$$

wenn man noch ausdrücklich voraussetzt, daß die Anfangszeile und -kolonne von $\sum_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$, d. h. die Reihen $\sum_0^\infty {}_\mu\, a_\mu^{(0)}$, $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_0^{(\nu)}$ *konvergieren.*

Es verdient bemerkt zu werden, daß das Konvergenzkriterium (18) eine etwas größere Tragweite besitzt, als das ihm entsprechende (d. h.

gleichfalls auf der Wahl $C_\nu = \nu^{1+\varrho}$ beruhende) Anfangskriterium der Skala (16a). Man findet zunächst:

$$(\mu+\nu)^{2+\varrho} = \left((\mu+\nu)^{1+\frac{\varrho}{2}}\right)^2$$

$$> \left(\frac{1}{2}\left(\mu^{1+\frac{\varrho}{2}} + \nu^{1+\frac{\varrho}{2}}\right)\right)^2 \text{[1]}$$

$$> \frac{1}{2}(\mu\nu)^{1+\frac{\varrho}{2}}. \tag{19}$$

Reagiert also $a_\mu^{(\nu)}$ für irgendein bestimmtes $\varrho > 0$ auf das Anfangskriterium der Skala (16a), so ergibt sich das gleiche in bezug auf das Kriterium (18), sofern man daselbst $\varrho$ durch $\frac{\varrho}{2}$ ersetzt.

Andererseits ergibt sich:

$$\frac{(\mu+\nu)^2}{(\mu\nu)^{1+\varrho}} = \frac{\mu^{1-\varrho}}{\nu^{1+\varrho}} + \frac{\nu^{1-\varrho}}{\mu^{1+\varrho}} + \frac{2}{(\mu\nu)^\varrho}$$

$$> \frac{\mu^{1-\varrho}}{\nu^{1+\varrho}} + \frac{\nu^{1-\varrho}}{\mu^{1+\varrho}}. \tag{20}$$

Ist sodann $\varrho < 1$ und wird eine positive Zahl $G$ *beliebig groß* vorgeschrieben, so hat man jedenfalls:

$$\frac{\mu^{1-\varrho}}{\nu^{1+\varrho}} + \frac{\nu^{1-\varrho}}{\mu^{1+\varrho}} > G,$$

wenn schon:

$$\frac{\mu^{1-\varrho}}{\nu^{1+\varrho}} \geqq G \quad \text{oder:} \quad \frac{\nu^{1-\varrho}}{\mu^{1+\varrho}} \geqq G,$$

wenn also zwischen $\mu$ und $\nu$ eine der beiden Beziehungen besteht:

$$\mu \geqq G^{\frac{1}{1-\varrho}} \cdot \nu^{\frac{1+\varrho}{1-\varrho}} \quad \text{oder:} \quad \nu \geqq G^{\frac{1}{1-\varrho}} \cdot \mu^{\frac{1+\varrho}{1-\varrho}},$$

was offenbar für unendlich viele Wertepaare $(\mu, \nu)$ der Fall ist. Infolgedessen ergibt sich aber aus Ungl. (20), daß:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \frac{(\mu+\nu)^2}{(\mu\nu)^{1+\varrho}} = \infty \quad (\mu > 0,\ \nu > 0;\ 0 < \varrho < 1), \tag{21}$$

und die Vergleichung dieser Beziehung mit den Kriterien (16a) zeigt,

---

1) Man hat für jedes $\sigma$:

$$(\mu+\nu)^\sigma \begin{cases} \geqq \mu^\sigma \\ \geqq \nu^\sigma \end{cases}$$

also, wenn die Kombination $\mu = \nu = 0$ ausgeschlossen wird:

$$(\mu+\nu)^\sigma > \frac{1}{2}(\mu^\sigma + \nu^\sigma).$$

daß nicht nur das Anfangskriterium, sondern sogar die ganze Skala versagen kann, auch wenn das Kriterium (18) eine Entscheidung liefert. Dieses Versagen der ganzen Skala (16a) tritt offenbar insbesondere stets dann ein, wenn gleichzeitig mit (18) für jedes noch so kleine $\varrho > 0$ die Beziehung besteht:

$$\underline{\lim}_{\mu+\nu\to\infty} (\mu\nu)^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} > 0.$$

5. Ein anderes (namentlich für die Theorie der Potenzreihen mit zwei Veränderlichen) nützliches Spezialkriterium ergibt sich, wenn in Ungl. (III) gesetzt wird:

$$(22) \quad C_\mu = \alpha^{-\mu}, \quad C_\nu = \alpha^{-\nu}, \quad \text{also:} \quad C_\mu^{(\nu)} = \alpha^{-(\mu+\nu)}, \quad \text{wo:} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Man findet dann zunächst, daß die Doppelreihe $\sum\limits_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$ *konvergiert*, wenn für $\mu + \nu \geqq l$:

$$a_\mu^{(\nu)} \leqq \alpha^{\mu+\nu},$$

anders geschrieben:

$$(23) \qquad \left(a_\mu^{(\nu)}\right)^{\frac{1}{\mu+\nu}} \leqq \alpha,$$

und diese Bedingung ist erfüllt, wenn:

$$(\text{IV a}) \qquad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \left(a_\mu^{(\nu)}\right)^{\frac{1}{\mu+\nu}} < \alpha, \quad \text{d. h.} \quad < 1.$$

Da andererseits die *Divergenz* der Doppelreihe $\sum\limits_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$ schon feststeht, wenn nur überhaupt *für unendlich viele* Glieder $a_\mu^{(\nu)}$ die Beziehung besteht:

$$\left(a_\mu^{(\nu)}\right)^{\frac{1}{\mu+\nu}} \geqq 1,$$

also um so mehr, wenn:

$$(\text{IV b}) \qquad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \left(a_\mu^{(\nu)}\right)^{\frac{1}{\mu+\nu}} > 1,$$

so ergibt sich durch Zusammenfassung dieses Divergenzkriteriums mit dem Konvergenzkriterium (IVa) dasjenige *disjunktive Doppelkriterium*, welches das Analogon zu dem Cauchyschen Fundamentalkriterium erster Art für einfach unendliche Reihen (§ 50, S. 342/3, Ungl. (5a), (5b)) bildet.

6. Als Beispiel für die Anwendung der gewonnenen Kriterien wollen wir die (für die Zahlentheorie und die Theorie der elliptischen Funktionen wichtige) Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$(24) \quad a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{(a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2)^\sigma} \quad \left\{ \begin{array}{c} \mu = 0, 1, 2, \cdots, \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots, \\ \text{mit Ausnahme der Kombination} \\ \mu = \nu = 0 \ (\text{also: } a_0^{(0)} = 0) \end{array} \right.$$

behandeln. Dabei sei die „quadratische Form“ $a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2$ eine sogenannte *positive* Form in $\mu$, $\nu$ (mit *negativer Determinante* oder *Dis-*

*kriminante* $b^2 - ac$), d. h. die Zahlen $a, b, c$ sollen den folgenden Bedingungen genügen:

$$a > 0, \quad c > 0, \quad b^2 - ac = -\Delta < 0 \tag{25}$$

(während $b$ im übrigen beliebig, eventuell auch $= 0$ sein kann).

Infolge der Identität:

$$a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 = \frac{1}{a}\{(a^2\mu^2 + 2ab\mu\nu + b^2\nu^2) + (ac - b^2)\nu^2\}$$

$$= \frac{1}{a}\{(a\mu + b\nu)^2 + \Delta\nu^2\} \tag{26}$$

fällt dieser Ausdruck (abgesehen von der ja bereits ausgeschlossenen Kombination $\mu = \nu = 0$) stets *wesentlich positiv* aus, sodaß die fragliche Doppelreihe aus lauter wohl definierten positiven Gliedern besteht, wenn unter $\sigma$ eine beliebige reelle Zahl verstanden wird. Es handelt sich dann darum, zu entscheiden, für welche Werte $\sigma$ die betreffende Reihe konvergiert bzw. divergiert.

Bedeutet $A$ eine positive Zahl, die von keiner der drei Zahlen $a$, $|b|$, $c$ übertroffen wird, so hat man:

$$a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 \leqq A(\mu + \nu)^2,$$

mithin:

$$a_\mu^{(\nu)} \geqq \left(\frac{1}{A}\right)^\sigma \cdot \frac{1}{(\mu + \nu)^{2\sigma}}$$

und daher:

$$(\mu + \nu)^2 \cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq \left(\frac{1}{A}\right)^\sigma \cdot (\mu + \nu)^{2(1-\sigma)}, \tag{27}$$

sodaß sich aus dem Anfangskriterium der Skala (16b) die *Divergenz* der vorgelegten Doppelreihe ergibt, falls $\sigma \leqq 1$.

Andererseits besteht neben Gl. (26) die folgende analog gebildete:

$$a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 = \frac{1}{c}\{(b\mu + c\nu)^2 + \Delta\mu^2\}. \tag{28}$$

Aus (26) und (28) folgt sodann:

$$a(a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2) \geqq \Delta\nu^2$$
$$c(a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2) \geqq \Delta\mu^2$$

und daher:

$$a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 \geqq \frac{\Delta}{a + c} \cdot (\mu^2 + \nu^2). \tag{29}$$

Nun ist:

$$\mu^2 - 2\mu\nu + \nu^2 = (\mu - \nu)^2 \geqq 0,$$

also:

$$\mu^2 + \nu^2 \geqq 2\mu\nu$$

und daher:

$$\mu^2 + \nu^2 = \frac{\mu^2 + \nu^2}{2} + \frac{\mu^2 + \nu^2}{2} \geqq \frac{1}{2}(\mu + \nu)^2,$$

sodaß die Ungleichung (29) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$(30)\qquad a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 \geqq \frac{\Delta}{2(a+c)} \cdot (\mu+\nu)^2.$$

Somit ergibt sich schließlich:

$$(31)\qquad a_\mu^{(\nu)} \leqq \left(\frac{2(a+c)}{\Delta}\right)^\sigma \cdot \frac{1}{(\mu+\nu)^{2\sigma}}$$

und:

$$(32)\qquad (\mu+\nu)^{2+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq \left(\frac{2(a+c)}{\Delta}\right)^\sigma \cdot \frac{1}{(\mu+\nu)^{2\sigma-2-\varrho}},$$

also, mit Rücksicht auf das erste Konvergenzkriterium der Skala (16a):

$$(33)\qquad \lim_{\mu+\nu\to\infty} (\mu+\nu)^{2+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty,$$

wenn: $2\sigma - 2 - \varrho \geqq 0$, $\sigma \geqq 1 + \frac{\varrho}{2}$, d. h. schließlich $\sigma > 1$.[1])

Hiernach ist die fragliche Doppelreihe *konvergent* für $\sigma > 1$, *divergent* für $\sigma \leqq 1$.

Dieses Resultat läßt sich noch in folgender Weise vervollständigen. Da über das Vorzeichen von $b$ keinerlei besondere Voraussetzung gemacht wurde, so ist auch die Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{(a\mu^2 - 2b\mu\nu + c\nu^2)^\sigma}$$

*konvergent* für $\sigma > 1$, *divergent* für $\sigma \leqq 1$.

---

1) Will man statt des Anfangskriteriums (16a) das Kriterium (18) anwenden, so findet man aus Gl. (26) und (28):

$$a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 \begin{cases} \geqq \dfrac{\Delta}{a} \cdot \nu^2 \\[2mm] \geqq \dfrac{\Delta}{c} \cdot \mu^2 \end{cases}$$

und hieraus für $\mu \geqq 1$, $\nu \geqq 1$:

$$a_\mu^{(\nu)} \begin{cases} \leqq \left(\dfrac{a}{\Delta}\right)^\sigma \cdot \dfrac{1}{\nu^{2\sigma}} \\[2mm] \leqq \left(\dfrac{c}{\Delta}\right)^\sigma \cdot \dfrac{1}{\mu^{2\sigma}}, \end{cases}$$

also auch:

$$a_\mu^{(\nu)} \leqq \left(\frac{\sqrt{ac}}{\Delta}\right)^\sigma \cdot \frac{1}{(\mu\nu)^\sigma}.$$

Hieraus erkennt man, daß die Doppelreihe nach Ausschluß von $\mu = 0$, $\nu = 0$ d. h. der ersten Kolonne und ersten Zeile konvergiert, wenn $\sum \frac{1}{\mu^\sigma}$, $\sum \frac{1}{\nu^\sigma}$ konvergieren, also für $\sigma > 1$ — ein Ergebnis, an welchem durch nachträgliche Hinzufügung der ersten Kolonne bzw. Zeile nichts geändert wird, da diese, wie unmittelbar zu sehen, dann gleichfalls konvergieren.

Da ferner:

$$a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 = a\cdot(-\mu)^2 + 2b\cdot(-\mu)(-\nu) + c\cdot(-\nu)^2$$

$$a\mu^2 - 2b\mu\nu + c\nu^2 \begin{cases} = a\cdot(-\mu)^2 + 2b\cdot(-\mu)\cdot\nu + c\nu^2 \\ = a\cdot\mu^2 + 2b\mu\cdot(-\nu) + c\cdot(-\nu)^2, \end{cases}$$

so erkennt man, daß die Doppelreihe:

$$\sum_0^\infty{}'_{\mu,\nu} \frac{1}{(a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2)^\sigma}$$

(wo der Akzent an dem Summenzeichen die Weglassung der Kombination $\mu = \nu = 0$ ausdrücken soll) *ungeändert* bleibt, wenn man den *beiden* Indizes $\mu, \nu$ die Werte $0, -1, -2, \cdots$ (statt $0, 1, 2, \cdots$) beilegt; daß sie dagegen in die Doppelreihe:

$$\sum_0^\infty{}'_{\mu,\nu} \frac{1}{(a\mu^2 - 2b\mu\nu + c\nu^2)^\sigma}$$

übergeht, wenn man dem *einen* der beiden Indizes $\mu, \nu$ die Werte $0, -1, -2, \cdots$, dem andern die Werte $0, 1, 2, \cdots$ beilegt.

Daraus ergibt sich aber, daß auch die Doppelreihe:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{\mu,\nu} \frac{1}{(a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2)^\sigma}$$

(wobei also die Summation so zu verstehen ist, daß sowohl für $\mu$, als für $\nu$ alle Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ mit einzigem Ausschluß der Kombination $\mu = \nu = 0$ zu setzen sind) für $\sigma > 1$ *konvergiert*, für $\sigma \leqq 1$ *divergiert*.

# Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher

## Herausgegeben von E. Jahnke

Die Sammlung setzt sich zum Ziel, kurze Darstellungen zu bieten, welche für ein engbegrenztes Gebiet die mathematischen Methoden einfach und leichtfaßlich ableiten und deren Verwendbarkeit in den einzelnen Teilen von Physik und Technik aufdecken. Dabei ist Vollständigkeit der Beweisführung nicht erstrebt, vielmehr wird besonderer Wert darauf gelegt, Dinge, die für die Anwendungen von Wichtigkeit sind, nicht zugunsten wissenschaftlicher Strenge zurücktreten zu lassen. Die Darstellung der einzelnen Gebiete ist so gehalten, daß jede ein abgeschlossenes Ganzes für sich bildet.

### Bisher erschienen:

I. Einführung in die Theorie des Magnetismus. Von Dr. R. Gans, Professor an der Universität La Plata. Mit 40 Fig. [VI u. 110 S.] 1908. Steif geh. M. 2.40, in Leinw. geb. M. 2.80.

II. Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Von K. W. Wagner, Kaiserl. Telegr.-Ingenieur in Charlottenburg. Mit 23 Figuren. [IV u. 109 S.] 1908. Steif geh. M. 2.40, in Leinwand geb. M. 2.80.

III. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Von Dr. Cl. Schaefer, a. o. Professor an der Universität Breslau. Mit Bildnis J. C. Maxwells und 32 Figuren. [VIII u. 174 S.] 1908. Steif geh. M. 3.40, in Leinwand geb. M. 3.80.

IV. Die Theorie der Besselschen Funktionen. Von Dr. P. Schafheitlin, Professor am Sophien-Realgymnasium zu Berlin. Mit 1 Figurentafel. [V u. 129 S.] 1908. Steif geh. M. 2.80, in Leinwand geb. M. 3.20.

V. Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Von Dr. E. Jahnke, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Berlin, und F. Emde, Prof. a. d. Bergakademie in Klausthal i. H. Mit 53 Figuren. [XII u. 176 S.] gr. 8. 1909. In Leinwand geb. M. 6.—

VI. 1 u. 2. Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. Von Dr. W. v. Ignatowsky, Privatdoz. a. d. Univ. Berlin. In 2 Teilen.

I. Die Vektoranalysis. Mit 27 Fig. [VIII u. 112 S.] 1909. Steif geh. M. 2.60, in Leinw. geb. M. 3.—

II. Anwendung der Vektoranalysis in der theoretischen Physik. Mit 14 Fig. [IV u. 123 S.] 1910. Steif geh. M. 2.60, in Leinwand geb. M. 3.—

VII. Theorie der Kräftepläne. Von Dr. H. E. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig. Mit 46 Figuren. [VI u. 99 S.] 1910. Steif geh. M. 2.60, in Leinwand geb. M. 3.—

VIII. Mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse. Von Dr. P. Schwahn, Direktor der Gesellschaft und Sternwarte „Urania" in Berlin. Mit 20 Fig. [VI u. 128 S.] 8. 1910. Steif geh. M. 3.20, in Leinwand geb. M. 3.60.

IX. Die Determinanten. Von Geh. Hofrat Dr. E. Netto, Professor an der Universität Gießen. [VI u. 130 S.] 8. 1910. Steif geh. M. 3.20, in Leinwand geb. M. 3.60.

X. Einführung in die kinetische Theorie der Gase. Von Dr. A. Byk, Professor an der Universität und der Technischen Hochschule zu Berlin. 2 Teile.

I. Teil: Die idealen Gase. Mit 14 Figuren. [V u. 102 S.] 1910. Steif geh. M. 2.80, in Leinwand geb. M. 3.20. — II. Teil in Vorbereitung.

XI. Grundzüge der mathematisch-physikalischen Akustik. Von Dr. A. Kalähne, Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig. 2 Teile. I. Teil: [VII u. 144 S.] 1910. Steif geh. M. 3.20, in Leinwand geb. M. 3.60. — II. Teil: Mit 57 Figuren im Text. [X u. 225 S.] 1913. Steif geh. M. 5.40, in Leinwand geb. M. 6.—

XII. Die Theorie der Wechselströme. Von Professor Dr. E. Orlich, Mitglied der physikalisch-technischen Reichsanstalt zu Charlottenburg. Mit 37 Figuren. [IV u. 94 S.] 1912. Steif geh. M. 2.40, in Leinwand geb. M. 2.80.

XIII. Theorie der elliptischen Funktionen. Von Dr. Martin Krause unter Mitwirkung von Dr. Emil Naetsch, Professoren an der Technischen Hochschule zu Dresden. Mit 25 Figuren. [VII u. 186 S.] 1912. Steif geh. M. 3.60, in Leinwand geb. M. 4.—

XIV. Konforme Abbildung. Von weil. Oberlehrer Leo Lewent. Herausg. von Prof. Eugen Jahnke. Mit einem Beitrag von Dr. Wilh. Blaschke, Professor an der Universität Leipzig. Mit 40 Abbildungen. [VI u. 118 S.] 1912. Steif geh. M. 2.80, in Leinw. geb. M. 3.20.

XV. Die mathematischen Instrumente. Von Professor Dr. A. Galle in Potsdam. Mit 86 Abbildungen. [VI u. 187 S.] 1912. Steif geh. M. 4.40, in Leinw. geb. M. 4.80.

XVI. Dispersion und Absorption des Lichtes in ruhenden isotropen Körpern. Theorie und ihre Folgerungen. Von Dr. D. A. Goldhammer, Professor an der Universität Kasan. Mit 28 Figuren. [VI u. 144 S.] gr. 8. 1912. Steif geh. M. 3.60, in Leinw. geb. M. 4.—

XVII. Elemente der technischen Hydromechanik. Von Dr. R. v. Mises, Professor an der Universität Straßburg i. E. 2 Teile. I. Teil: Mit 72 Figuren. [VIII u. 212 S.] 8. 1914. Steif geh. M. 5.40 in Leinwand geb. M. 6.—. II. Teil in Vorbereitung.

XVIII. Graphische Methoden. Von Dr. C. Runge, Professor an der Universität Göttingen. Mit 94 Figuren im Text. [IV u. 142 S.] 1915. Geh. M. 4.40, in Leinwand geb. M. 5.—

XIX. Leitfaden zum graphischen Rechnen. Von Dr. R. Mehmke, Professor an der Technischen Hochschule zu Stuttgart. [Unter der Presse.]

Weitere Bände in Vorbereitung.

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN